Universidad de la República **Cálculo I**
Facultad de Ingeniería - IMERL **Curso anual 2017**

EXAMEN – SÁBADO 17 DE FEBRERO DE 2018

Nro examen	Cédula	Apellido y nombre

- El puntaje total es 100 puntos.
- La duración del parcial es tres horas y media.

Ejercicio 1: (15 puntos)

Sea $z = 2 - 2i$

a) Escriba z en notación polar o exponencial y halle z^4.
El módulo de z es $\rho = \sqrt{2^2+2^2} = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}$. El argumento es $arctg(-1) = -\frac{\pi}{4}$.
El complejo z^4 tiene como módulo $(2\sqrt{2})^4 = 64$. El argumento de z^4 es $4Arg(z) = -\pi = \pi$. En definitiva $z^4 = -64$.

b) Halle las raíces cúbicas de z y represéntelas en el plano complejo.
Para hallar las raíces cúbicas de z sabemos que el módulo será $\sqrt[3]{2\sqrt{2}} = 2^{\frac{1}{3}}2^{\frac{1}{6}} = \sqrt{2}$. Los argumentos de las raíces cúbicas son $\phi_1 = -\frac{\pi}{12}$, $\phi_2 = -\frac{\pi}{12} + \frac{2\pi}{3} = \frac{7\pi}{12}$ y $\phi_3 = -\frac{\pi}{12} + \frac{4\pi}{3} = \frac{5\pi}{4}$.

Ejercicio 2: (15 puntos)

Considere la sucesión:

$$a_n = \frac{2^n + 3^n}{5^n}$$

a) Halle $lim_{n\to+\infty} a_n$
$\lim_{n\to\infty} \frac{2^n+3^n}{5^n} = \lim_{n\to\infty} \frac{2^n}{5^n} + \lim_{n\to\infty} \frac{3^n}{5^n} = 0 + 0 = 0$

b) Clasifique la serie $\sum a_n$. En caso de convergencia calcule $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$.
La serie $\sum \frac{2^n+3^n}{5^n}$ es suma de dos series geométricas de razón $\frac{2}{5}$ y $\frac{3}{5}$ respectivamente. Como ambas tienen razón menor que uno la serie converge.
$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \sum_{n=1}^{\infty} (\frac{2}{5})^n + \sum_{n=1}^{\infty} (\frac{3}{5})^n = \frac{1}{1-\frac{2}{5}} - 1 + \frac{1}{1-\frac{3}{5}} - 1 = \frac{13}{6}$.

Ejercicio 3: (25 puntos)

1. Sean $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ funciones tales que f es derivable y g es continua en $\mathbb{R}$ y

$$G(x) = \int_0^{f(x)} g(t)dt.$$

Pruebe que G es derivable y halle su derivada en función de f y g.
Si $F(x) = \int_0^x g(t)dt$ entonces $G'(x) = (\int_0^{f(x)} g(t)dt)' = (F(f(x)))'$. Utilizando la regla de la cadena, $G'(x) = F'(f(x))f'(x)$ que por el teorema fundamental de cálculo es igual a $g(f(x))f'(x)$.

2. I) Enuncie la regla de Barrow
Ver teórico Corolario 224.
II) Halle las siguientes integrales por el método que le resulte mas conveniente:

$$\int_2^e \frac{1}{log^3(x)x} dx$$

Para esta primera integral utilizamos la fórmula de sustitución con $u = log(x)$, $du = \frac{dx}{x}$:
$\int_2^e \frac{1}{log^3(x)x}dx = \int_{log(2)}^1 \frac{du}{u^3} = \frac{-1}{2u^2}\ |_{log(2)}^1 = \frac{-1}{2} + \frac{1}{2log^2(2)}$

$$\int_0^1 x^2 e^{5x} dx$$

En esta segunda integral aplicamos partes dos veces: Sea $f(x) = x^2$ y $g(x) = \frac{e^{5x}}{5}$, entonces:
$\int_0^1 x^2 e^{5x} dx = \frac{x^2 e^{5x}}{5}\ |_0^1 - \frac{2}{5}\int_0^1 xe^{5x}dx$.
Aplicando partes nuevamente para $f(x) = x$ y $g(x) = \frac{e^{5x}}{5}$ obtenemos:
$\int_0^1 x^2 e^{5x} dx = \frac{e^5}{5} - \frac{2}{5}(\frac{xe^{5x}}{5}\ |_0^1 - \frac{1}{5}\int_0^1 e^{5x}dx) = \frac{e^5}{5} - \frac{2e^5}{25} + \frac{2e^5}{125} - \frac{2}{125}$.

Ejercicio 4: (20 puntos)

Sea f una función tal que su polinomio de Taylor de grado 3 en 0 es $P_3(f, 0) = 1 - x^2 - \frac{x^3}{6}$.

1. Halle $f(0)$, $f'(0)$, $f''(0)$ y $f'''(0)$.
   De la fórmula del polinomio de Taylor deducimos que $f(0) = 1$, $f'(0) = 0$, $f''(0) = -2$ y $f'''(0) = -1$.
2. Halle $lim_{x\to 0}\frac{f(x)-1+x^2}{x^3}$
   Para esto tenemos que $f(x) = P_3(f, 0) + r_3(x)$ con $\lim \frac{r_3(x)}{x^3} = 0$ y llegamos a que $lim_{x\to 0}\frac{f(x)-1+x^2}{x^3} = \frac{-1}{6}$
3. ¿La función f presenta un extremo relativo en 0? En caso afirmativo clasifíquelo.
   La primera derivada no nula en 0 es $f'' < 0$ por lo tanto, utilizando la Proposición 197, f presenta un máximo relativo en 0.

Ejercicio 5: (25 puntos)

a) Defina función derivable en un punto.
   Ver teórico Definición 174.

b) Pruebe que una función derivable en un punto es continua en dicho punto.
   Como existe $\lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a} = f'(a)$ se tiene necesariamente que $\lim_{x\to a} f(x) - f(a) = 0$ lo que implica que $\lim_{x\to a} f(x) = f(a)$

c) Una famosa empresa de bebidas quiere diseñar un nuevo envase, menos costoso, para sus latas de cerveza, teniendo en cuenta las siguientes consideraciones:

- Las latas tienen un volúmen fijo de $500cm^3$
- Las latas tienen estructura cilíndrica.
- El material de la pared de la lata cuesta $1\$/cm^2$
- El material del techo y el piso de la lata cuesta $2\$/cm^2$

Hallar el radio de la base y la altura de la lata para que el costo del material sea mínimo.
El volumen en cm^3 de la lata es:
$V = \pi r^2 h = 500$ por lo tanto $h = \frac{500}{\pi r^2}$.
La función costo en pesos es la siguiente:
$P = 2\pi rh + 2(2\pi r^2)$
que sustituyendo h nos queda:
$P = \frac{1000}{r} + 4\pi r^2$.
Luego, derivando e igualando a cero para buscar puntos críticos obtenemos la siguiente ecuación:

$$\frac{-1000}{r^2} + 8\pi r = 0$$

y despejando r llegamos a que $r = \frac{5}{\sqrt[3]{\pi}} cm$. Por último, despejando h en función de r, $h = \frac{20}{\sqrt[3]{\pi}} cm$.