Universidad de la República **Cálculo I**
Facultad de Ingeniería - IMERL **Curso anual 2017**

EXAMEN – MARTES 19 DE DICIEMBRE DE 2017

Nro examen	Cédula	Apellido y nombre

- El puntaje total es 100 puntos.
- La duración del parcial es tres horas y media.

Ejercicio 1: (15 puntos)

a) Dado $\alpha = a + bi \in \mathbb{C}$ pruebe la siguiente ecuación $\forall z \in \mathbb{C}$:

$$(z-\alpha)(z-\bar{\alpha}) = z^2 - 2Re(\alpha)z + \mid \alpha \mid^2 .$$

$(z-\alpha)(z-\bar{\alpha}) = z^2 - \alpha z - \bar{\alpha}z + \alpha\bar{\alpha} = z^2 - (\alpha+\bar{\alpha})z + \mid \alpha \mid^2 = z^2 - 2Re(\alpha)z + \mid \alpha \mid^2$. Utilizamos la propiedad distributiva y las siguientes propiedades de los números complejos:

$$\alpha\bar{\alpha} = \mid \alpha \mid^2$$

$$\alpha + \bar{\alpha} = 2Re(\alpha)$$

b) Halle las raíces del siguiente polinomio y dibújelas en el plano complejo:

$$P(z) = z^3 - 4z^2 + 5z$$

¿Forman un triángulo equilátero?

Observemos que $z = 0$ es una raíz evidente de $P(z)$. Resta hallar las raíces de $z^2 - 4z + 5$. Utilizando Bhaskara obtenemos las otras raíces $2 + i$ y $2 - i$. Estas raíces forman un triángulo isósceles pero no equilátero.

Ejercicio 2: (15 puntos)

1. Pruebe que si una sucesión c_n esta acotada y otra b_n tiende a cero entonces $lim_{n\to\infty} c_n b_n = 0$.
   Dado $\epsilon > 0$ debemos probar que existe n_0 a partir del cual $\forall n \geq n_0 \mid c_n b_n \mid < \epsilon$. Como c_n está acotada tenemos que $\mid c_n \mid \leq K$ por lo tanto:
   $$\mid c_n b_n \mid = \mid c_n \mid\mid b_n \mid \leq K \mid b_n \mid .$$
   Basta considerar entonces $\frac{\epsilon}{K}$ y aplicar la definición de $lim_{n\to\infty} b_n = 0$ para encontrar el n_0 correspondiente.
2. Considere la sucesión:
   $$a_n = \frac{sen(n)}{3n^2}$$
   I) Halle $lim_{n\to+\infty} a_n$
   Observemos que $sen(n)$ esta acotado entre -1 y 1 y $\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{3n^2} = 0$ por lo tanto
   $$lim_{n\to+\infty} a_n = 0.$$
   II) Clasifique la serie $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$.

Analicemos la convergencia absoluta de $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$,
$\mid \frac{sen(n)}{3n^2} \mid = \frac{|sen(n)|}{3n^2} \leq \frac{1}{3n^2}$ y utilizando el criterio de comparación obtenemos que la serie converge absolutamente y por lo tanto converge.

Ejercicio 3: (25 puntos)

1. Sean f y g funciones de $\mathbb{R}$ en $\mathbb{R}$ con derivada continua y F una primitiva de f.
   i) Pruebe la fórmula de sustitución para primitivas:
   $$\int f(g(x))g'(x)dx = F(g(x)) + C$$
   Para probar esto utilizamos la regla de la cadena:
   $$(F \circ g)'(x) = F'(g(x))g'(x) = f(g(x))g'(x).$$
   Integrando de ambos lados obtenemos el resultado buscado
   ii) Deduzca la fórmula de sustitución para integrales definidas:
   $$\int_a^b f(g(x))g'(x)dx = \int_{g(a)}^{g(b)} f(u)du$$
   Para deducir lo anterior debemos aplicar la regla de Barrow:
   $\int_a^b f(g(x))g'(x)dx = F(g(b) - F(g(a)) = \int_{g(a)}^{g(b)} f(u)du.$
   iii) Halle la siguiente integral definida:
   $$\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{1}{tg(x)}dx$$
   $$\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{1}{tg(x)}dx = \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{cos(x)}{sen(x)}dx.$$
   Utilizando el cambio de variable $sen(x) = u$, $cos(x)dx = du$ obtenemos
   $\int_{\frac{1}{\sqrt{2}}}^{\frac{\sqrt{3}}{2}} \frac{du}{u} = log(u) \mid_{\frac{1}{\sqrt{2}}}^{\frac{\sqrt{3}}{2}} = \frac{1}{2}log(3) - log(2) + \frac{1}{2}log(2) = \frac{1}{2}log(3) - \frac{1}{2}log(2).$
2. Halle la siguiente primitiva con el método que le resulte más conveniente.
   $$\int log(x)x^3dx.$$

Para hallar esta primitiva aplicaremos partes para $f(x) = \frac{x^4}{4}$ con $f'(x) = x^3$ y $g(x) = log(x)$ con $g'(x) = \frac{1}{x}$.

$$\int log(x)x^3dx = log(x)\frac{x^4}{4} - \int \frac{x^3}{4}dx = log(x)\frac{x^4}{4} - \frac{x^4}{16}$$

Ejercicio 4: (20 puntos)

a) Escriba la fórmula general de $P_n(f,a)$ el polinomio de Taylor de grado n de una función f alrededor del punto a.
   $P_n(f,a) = f(a) + f'(a)(x-a) + f''(a)\frac{(x-a)^2}{2!} + \cdots + f^{(n)}(a)\frac{(x-a)^n}{n!}$
b) Halle $P_3(log(x^2+1), 0)$.
   Sabemos que $log(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + o(x^2)$ por lo tanto $log(x^2+1) = x^2 - \frac{x^4}{2} + o(x^4) = x^2 + o(x^3)$ lo que implica que
   $$P_3(log(x^2+1), 0) = x^2$$

c) Calcule el siguiente límite:

$$lim_{x\to 0}\frac{log(1+x^2)-x^2}{x^3}.$$

Justifique

$lim_{x\to 0}\frac{log(1+x^2)-x^2}{x^3} = lim_{x\to 0}\frac{x^2+o(x^3)-x^2}{x^3} = 0$ sustituyendo la función por su polinomio de Taylor mas el resto y utilizando la propiedad principal del resto.

Ejercicio 5: (25 puntos)

Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una función.

a) Defina máximo y mínimo relativo de f.

Ver teórico Def 178

b) Pruebe que si f es derivable y tiene un extremo relativo en a, entonces $f'(a) = 0$.

Ver teórico Prop 180

c) Pruebe que la siguiente ecuación tiene una única solución:

$$sen(x) + 3 = 2x$$

Considere $f(x) = sen(x) + 3 - 2x$. Como f es continua en $\mathbb{R}$, $lim_{x\to +\infty} sen(x) + 3 - 2x = -\infty$ y $lim_{x\to -\infty} sen(x) + 3 - 2x = +\infty$ podemos aseguras por el teorema del Bolzano y la definición de límite que esta ecuación tendrá alguna solución. Para ver que es única analicemos el crecimiento: $f'(x) = cos(x) - 2 < 0$ ya que $cos(x)$ está acotado por 1 y -1. Lo anterior nos asegura que la función es monótona decreciente y la solución es única.