Universidad de la República **Cálculo I**
Facultad de Ingeniería - IMERL **Curso anual 2017**

Cuarto parcial – Jueves 23 de noviembre de 2017

Nro parcial	Cédula	Apellido y nombre

- El puntaje total es 30 puntos.
- La duración del parcial es tres horas y media.

Ejercicio 1: (9 puntos)

a) Enuncie el teorema fundamental del cálculo.

Ver teórico Teorema 33, pág 93.

b) I) Considere la función $f : [-1, 1] \to \mathbb{R}$ definida como:

$$f(x) = \begin{cases} -1 & \text{si } -1 \leq x \leq 0 \\ x & \text{si } 0 < x \leq 1 \end{cases}$$

Halle $G : [-1, 1] \to \mathbb{R}$ siendo $G(x) = \int_{-1}^{x} f(t)dt$.
Si $-1 \leq x \leq 0$ entonces $G(x) = \int_{-1}^{x} -1dt = -1(x+1) = -x-1$.
Si $0 < x \leq 1$ entonces $G(x) = \int_{-1}^{0} -1dt + \int_{0}^{x} tdt = -1 + \frac{x^2}{2}$.

II) ¿Es G continua en $x = 0$? Justifique.
$lim_{x\to 0^-} G(x) = lim_{x\to 0^-} -x-1 = -1$
$lim_{x\to 0^+} G(x) = lim_{x\to 0^+} -1 + \frac{x^2}{2} = -1$
Además, por la primera parte del Teorema Fundamental del cálculo, al ser f seccionalmente continua G va a ser continua.

c) Halle la derivada de la siguiente función:

$$F(x) = \int_{e^x}^{sen(x)} cos(t)\sqrt{t}dt$$

Por aditividad tenemos que: $F(x) = \int_{e^x}^{0} cos(t)\sqrt{t}dt + \int_{0}^{sen(x)} cos(t)\sqrt{t}dt$. Luego, utilizando el Teorema Fundamental del cálculo y la regla de la cadena,

$$F'(x) = -cos(e^x)\sqrt{e^x}e^x + cos(sen(x))\sqrt{sen(x)}cos(x)$$

Ejercicio 2: (7 puntos)

a) Demuestre la siguiente igualdad:

$$\int f'(t)g(t)dt = f(t)g(t) - \int f(t)g'(t)dt$$

.

Por la regla de la derivada del producto tenemos que:

$$(f.g)'(x) = f'(x)g(x) + f(x)g'(x).$$

Integrando en ambos miembros de la igualdad y utilizando linealidad obtenemos:

$$\int (f.g)'(x) = \int f'(x)g(x)dx + \int f(x)g'(x)dx$$

Luego, utilizando la definición de primitiva,

$$f(x)g(x)+C=\int f'(x)g(x)dx+\int f(x)g'(x)dx.$$

Finalmente, despejando $\int f'(x)g(x)dx$ obtenemos la igualdad buscada.

b) Halle la siguiente primitiva:

$$\int t^2 sen(2t)dt$$

Aplicando partes con $g(t)=t^2$ y $f(t)=\frac{-cos(2t)}{2}$ obtenemos,

$$\int t^2 sen(2t)dt=\frac{-t^2cos(2t)}{2}+\int tcos(2t)dt.$$

Luego, aplicando partes nuevamente a $\int tcos(2t)dt$ con $g(t)=t$ y $f(t)=\frac{sen(2t)}{2}$,

$$\int t^2 sen(2t)dt=\frac{-t^2cos(2t)}{2}+\frac{tsen(2t)}{2}-\int\frac{sen(2t)}{2}dt.$$

Hallando la primitiva que nos resta concluimos que

$$\int t^2 sen(2t)dt=\frac{-t^2cos(2t)}{2}+\frac{tsen(2t)}{2}+\frac{1}{2}\frac{cos(2t)}{2}+C=\frac{-t^2cos(2t)}{2}+\frac{tsen(2t)}{2}+\frac{cos(2t)}{4}+C.$$

Ejercicio 3: (6 puntos)

Halle el área comprendida entre las parábolas $f(x)=x^2-4$ y $g(x)=-2x^2+6x+5$.
Para calcular el área comprendida debemos hallar la intersección entre ambas parábolas.
Si $x^2-4=-2x^2+6x+5$ entonces $-3x^2+6x+9=0$ y obtenemos que $x=3$ o $x=-1$. Por lo tanto el área comprendida es:

$$\int_{-1}^{3}(g(t)-f(t))dt=\int_{-1}^{3}-3x^2+6x+9=-3\frac{x^3}{3}+6\frac{x^2}{2}\mid_{-1}^{3}+36=32.$$

Ejercicio 4: (8 puntos)

Resuelva las siguientes integrales (definidas o no) por el método que le resulte más conveniente

a) $\int\frac{x^4-2x^3-3x^2+6x+5}{(x-2)^2(x+1)}dx$

El primer paso es realizar la división de polinomios y escribir:

$$\frac{x^4-2x^3-3x^2+6x+5}{(x-2)^2(x+1)}=x+1+\frac{2x+1}{(x-2)^2(x+1)}$$

Para obtener $\int\frac{2x+1}{(x-2)^2(x+1)}$ separamos en fracciones simples:

$$\frac{2x+1}{(x-2)^2(x+1)}=\frac{A}{x-2}+\frac{B}{(x-2)^2}+\frac{C}{x+1}$$

Hallando denominador común llegamos al siguiente sistema de ecuaciones:

$$A+C=0$$

$$-A+B-4C=2$$

$$-2A+B+4C=1$$

cuya solución es $A=\frac{1}{9}$, $B=\frac{5}{3}$ y $C=-\frac{1}{9}$.

Primitivizando,

$$\int \frac{2x+1}{(x-2)^2(x+1)} = \frac{1}{9} log \mid x-2 \mid - \frac{5}{3(x-2)} - \frac{1}{9} log \mid x+1 \mid + C$$

y concluimos que

$$\int \frac{x^4 - 2x^3 - 3x^2 + 6x + 5}{(x-2)^2(x+1)} dx = \frac{x^2}{2} + x + \frac{1}{9} log \mid x-2 \mid - \frac{5}{3(x-2)} - \frac{1}{9} log \mid x+1 \mid + C$$

b) $\int_0^1 \frac{arctg^3(t)}{1+t^2} dt$

Para calcular esta integral realizamos el cambio de variable $u = arctg(t)$ con $du = \frac{dt}{1+t^2}$,

$$\int_0^1 \frac{arctg^3(t)}{1+t^2} dt = \int_0^{\frac{\pi}{4}} u^3 du = \frac{u^4}{4} \mid_0^{\frac{\pi}{4}} = \frac{\pi^4}{1024}.$$