Universidad de la República **Cálculo I**
Facultad de Ingeniería - IMERL **Curso anual 2017**

Tercer parcial – Sábado 7 de octubre de 2017

Nro parcial	Cédula	Apellido y nombre

- El puntaje total es 30 puntos.
- La duración del parcial es tres horas.

Desarrollo. Total: 30 puntos

Ejercicio 1: (5 puntos)

Clasifique la serie $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n(n+1)}$ justificando cada paso.
Respuesta Si probamos que la serie converge absolutamente probaremos en particular que converge.

$$\sum_{n=1}^{+\infty} |\frac{(-1)^{n+1}}{n(n+1)}| = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n(n+1)}$$

y esta serie es convergente ya que utilizando el criterio del equivalente,

$$lim_{n\to\infty} \frac{1/n^2}{1/n(n+1)} = 1$$

y $\sum \frac{1}{n^2}$ converge.

Ejercicio 2: (6 puntos)

Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una función.

(a) Defina continuidad de f en a.
Respuesta Ver teórico Def 164.

(b) Si f verifica que$|f(x) - f(y)| \leq K|x - y|$ con K una constante real para todo $x, y \in \mathbb{R}$, pruebe que f es continua en $\mathbb{R}$.
Respuesta Sea $a \in \mathbb{R}$ fijo, dado $\epsilon > 0$, tomemos $\delta = \frac{\epsilon}{K}$. Si $|x - a| < \delta = \frac{\epsilon}{K}$, entonces

$$|f(x) - f(a)| \leq K|x - a| < K\frac{\epsilon}{K} = \epsilon$$

(c) En las hipótesis de la parte anterior, es f uniformemente continua? Justifique.
Respuesta Como el δ que tomamos no depende del punto a la función resulta uniformemente continua.

Ejercicio 3: (7 puntos)

(a) Enunciar el teorema de valor medio de Lagrange para una función $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ y probarlo en el caso en que $f(a) = f(b)$.
Respuesta Ver teórico Teorema 23.

(b) Probar que si una función derivable $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ verifica que $f'(x) = 0$ para todo $x \in \mathbb{R}$, entonces f es constante.

Respuesta Supongamos por absurdo que existen $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ tales que $f(x_1) \neq f(x_2)$. Aplicando el Teorema de Lagrange en $[x_1, x_2]$ obtenemos que existe $c \in (x_1, x_2)$ con

$$f'(c) = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} \neq 0$$

y contradice la hipótesis que $f'(x) = 0$ para todo $x \in \mathbb{R}$.

Ejercicio 4: (7 puntos)

Sea $f(x) = senh(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$.

(a) Halle $P_5(f, 0)$.

Respuesta Observemos que

$$(senh(x))' = \frac{e^x + e^{-x}}{2} = cosh(x)$$

y a su vez $(cosh(x))' = senh(x)$. O sea, $f'(0) = f'''(0) = f^{(5)}(0) = cosh(0) = 1$ y $f(0) = f''(0) = f^{(4)}(0) = senh(0) = 0$. Por lo tanto:

$$P_5(f, 0) = x + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!}$$

(b) Calcule utilizando el polinomio de Taylor de $senh(x)$ de grado conveniente el siguiente límite:

$$lim_{x\to 0} \frac{senh(x) - x - x^3/3!}{x^5}$$

Justifique.

Respuesta Para calcular el límite sustituimos

$$senh(x) = x + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + r_5(x)$$

con $r_5(x) = o(x^5)$. Luego,

$$lim_{x\to 0} \frac{senh(x) - x - x^3/3!}{x^5} = lim_{x\to 0} \frac{x^5/5! + r_5(x)}{x^5} = 1/5!$$

ya que $lim_{x\to 0} \frac{r_5(x)}{x^5} = 0$.

Ejercicio 5: (5 puntos)

Sean b y h las dimensiones de los lados de la base y la altura de la caja respectivamente.

(a) $V = b^2 h \Rightarrow h = V/b^2$ (1)

La cantidad de cartón a utilizar es la suma de las áreas de los lados de la caja más el área de la base (que se pone doble). Entoces: $A = 3b^2 + 4bh$

Sustituyendo por la expresión (1) tenemos que: $A = 3b^2 + 4b(V/b^2)$

Para minimizar la función A(b) consideramos su derivada: $A'(b) = 6b - 4V/b^2$

Buscamos los extremos relativos de A:

$A'(b) = 0 \Rightarrow 6b = 4V/b^2 \Rightarrow b^3 = 4 \times 1500/6 \Rightarrow b = 10$ cm.

Observando el signo de $A'(b)$ en el entorno de 10 se concluye que la función tienen un mínimo relativo en $b = 10$.

Por lo tanto, las dimensiones óptimas son $b = 10$ y $h = 15$ cm.

(b) Consideremos el área de cartón a utilizar ahora: $A_p = 3b^2 + 4b(V/b^2) - 4 \Rightarrow A'_p(b) = 6b - 4V/b^2$

Como $A'_p = A'$ minimizar el área en este caso equivale a minimizar el área de la parte (a). Por lo tanto, las dimensiones óptimas no cambian.