

EXÁMEN – SÁBADO 18 DE FEBRERO DE 2017

Nro de Exámen	Cédula	Apellido y nombre

Escribir nombre y cédula en todas las hojas que se entreguen.

**Problema 1.** (30 pts)

- (a) Enunciar el teorema de Bolzano.
- (b) Probar que la ecuación  $x \sin(x) = 1$  tiene solución en el intervalo  $[\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}]$
- (c) Demostrar que la ecuación de la parte anterior tiene infinitas soluciones en  $\mathbb{R}$ .
- (d) Sea  $f(x) = xe^{\cos(x)}$ . Calcular  $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x)$ .
- (e) Calcular  $f'(x)$  y bosquejar su signo.
- (f) Bosquejar el gráfico de  $f(x)$ .

**Problema 2.** (20 pts)

Se considera la sucesión definida por recurrencia:

$$\begin{cases} a_1 = 2 \\ a_{n+1} = \frac{2(1+a_n)}{2+a_n} \end{cases} \text{ si } n \geq 1$$

- (a) Demostrar que  $a_n \geq 0$  y  $a_n \geq \sqrt{2}$  para todo  $n \geq 1$  (Sugerencia: probar que  $a_n^2 \geq 2$ ).
- (b) Demostrar que  $a_{n+1} \leq a_n$  para todo  $n \geq 1$ .
- (c) Deducir que  $\{a_n\}$  tiene límite y calcularlo.
- (d) Clasificar  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ .

**Problema 3.** (30 pts)

Sea  $f(x) = e^{x^2} \int_0^x e^{-t^2} dt$ .

- (a) Calcular el polinomio de Taylor de orden 3 de  $f$  en 0.
- (b) Calcular  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)-x}{x^3}$ .

**Problema 4.** (20 pts)

Calcular las siguientes integrales:

- (a)  $\int \frac{\cos x dx}{\operatorname{sen}^3 x}$
- (b)  $\int x^3 \cos x dx$
- (c)  $\int \frac{dx}{x(x^2+1)^2}$