

EXÁMEN – SÁBADO 18 DE FEBRERO DE 2017

Nro de Exámen	Cédula	Apellido y nombre

Escribir nombre y cédula en todas las hojas que se entreguen.

Problema 1. (30 pts)

- (a) Enunciar el teorema de Bolzano.
- (b) Probar que la ecuación $x \sin(x) = 1$ tiene solución en el intervalo $[\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}]$
- (c) Demostrar que la ecuación de la parte anterior tiene infinitas soluciones en \mathbb{R} .
- (d) Sea $f(x) = xe^{\cos(x)}$. Calcular $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x)$.
- (e) Calcular $f'(x)$ y bosquejar su signo.
- (f) Bosquejar el gráfico de $f(x)$.

Problema 2. (20 pts)

Se considera la sucesión definida por recurrencia:

$$\begin{cases} a_1 &= 2 \\ a_{n+1} &= \frac{2(1+a_n)}{2+a_n} \quad \text{si } n \geq 1 \end{cases}$$

- (a) Demostrar que $a_n \geq 0$ y $a_n \geq \sqrt{2}$ para todo $n \geq 1$ (Sugerencia: probar que $a_n^2 \geq 2$).
- (b) Demostrar que $a_{n+1} \leq a_n$ para todo $n \geq 1$.
- (c) Deducir que $\{a_n\}$ tiene límite y calcularlo.
- (d) Clasificar $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$.

Problema 3. (30 pts)

Sea $f(x) = e^{x^2} \int_0^x e^{-t^2} dt$.

- (a) Calcular el polinomio de Taylor de orden 3 de f en 0.
- (b) Calcular $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)-x}{x^3}$.

Problema 4. (20 pts)

Calcular las siguientes integrales:

- (a) $\int \frac{\cos x dx}{\operatorname{sen}^3 x}$
- (b) $\int x^3 \cos x dx$
- (c) $\int \frac{dx}{x(x^2+1)^2}$