Universidad de la República **Cálculo 1 ANUAL**
Facultad de Ingeniería - IMERL **Primer Semestre 2016**

PRIMER PARCIAL – LUNES 2 DE MAYO DE 2016

Nro de Exámen	Cédula	Apellido y nombre

Escribir nombre y cédula en todas las hojas que se entreguen.

Problema 1. (30 pts)

(a) Demostrar, utilizando la definición, que la función identidad $h(x) = x$ es continua en todo punto $x \in \mathbb{R}$.

(b) Enunciar el Teorema de Bolzano.

(c) Sea $f : [0, 1] \to \mathbb{R}$ continua en $[0, 1]$. Probar que la función $g(x) = f(x) - x$ es continua en $[0, 1]$.

(d) Supongamos que la función f de la parte anterior verifica que $0 \leq f(x) \leq 1$ para todo $x \in [0, 1]$. Demostrar que existe al menos un punto $c \in [0, 1]$ tal que $f(c) = c$.

Problema 2. (20 pts)

(a) Demostrar que si $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ es continua en $[a, b]$, entonces la función $F : [a, b] \to \mathbb{R}$ definida como $F(x) = \int_a^x f(t)dt$ es derivable en cualquier punto $x \in (a, b)$ y su derivada es $F'(x) = f(x)$.

(b) Sea $F(x) = \int_2^x \frac{dt}{2t^2+1}$. Probar que F es derivable en cualquier punto $x \in (2, +\infty)$ y calcular $F'(x)$.

(c) ¿El área bajo el gráfico de la función $h\colon [0, \infty] \to \mathbb{R}\ /h(x) = \dfrac{1}{2x^2 + 1}$ es finita? Justifique.

Problema 3. (30 pts)

(a) Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una función n veces derivable. Definir $P_n(x)$, el polinomio de Taylor de orden n de $f(x)$ en un punto a de su dominio. ¿Qué propiedad cumple la función $E_n(x) = f(x) - P_n(x)$?

(b) Hallar el polinomio de Taylor de orden 3 de $f(x) = \dfrac{1}{2}\displaystyle\int_0^{2x} e^{t^2} dt$ alrededor de 0.

(c) Calcular el siguiente límite:

$$\lim_{x \to 0} \frac{f(x)}{4x^3}$$

Problema 4. (10 pts)

Se consideran los siguientes conjuntos

$$A = \{z \in \mathbb{C} : |z - 2| \leq 1\},\ B = \{z \in \mathbb{C} : |z - 2| > |z - 3|\}$$

Dibujar los conjuntos A, B y $A \cap B$.

Problema 5. (10 pts)

(a) Calcular $\int_0^{2\pi} tan(x)dx$.

(b) Hallar $\int x^2 cos(x)dx$.

(c) Clasificar $\sum (-1)^n \frac{logn}{n}$