Universidad de la República | **Cálculo I**

Facultad de Ingeniería - IMERL | **Curso anual 2017**

SEGUNDO PARCIAL – VIERNES 30 DE JUNIO DE 2017

Nro parcial	Cédula	Apellido y nombre

- El puntaje total es 25 puntos.
- La duración del parcial es tres horas.

(I) Verdadero Falso. Total: 2 puntos

Puntajes: $\frac{1}{2}$ punto si la respuesta es correcta, $\frac{-1}{2}$ punto si la respuesta es incorrecta, 0 punto por no contestar. Indique sus respuestas (V/F) en los casilleros correspondientes.

Ejercicio 1	Ejercicio 2	Ejercicio 3	Ejercicio 4
F	V	V	F

Ejercicio 1: Si la sucesión a_n tiende a cero, entonces necesariamente la serie $\sum_{i=0}^{+\infty} a_n$ converge.

Ejercicio 2: Si toda subsucesión de una sucesión dada converge entonces dicha sucesión también converge.

Ejercicio 3: Todos los complejos de módulo 2 forman una circunferencia de centro en el origen y radio 2 en el plano complejo.

Ejercicio 4: $Re(z.w) = Re(z)Re(w)$ para todo $z, w \in \mathbb{C}$.

(II) Completar en el espacio asignado. Total: 3 puntos

Las raíces cuartas de $-i$ escritas en notación polar o exponencial son:

$$e^{i\frac{3\pi}{8}}, e^{i\frac{7\pi}{8}}, e^{i\frac{11\pi}{8}}, e^{i\frac{15\pi}{8}}$$

(III) Desarrollo. Total: 20 puntos

Ejercicio 1: (5 puntos)

(a) Dado el polinomio con coeficientes reales:

$$P(z) = a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \cdots + a_1 z + a_0$$

pruebe que si α es raíz de $P(z)$ entonces $\bar{\alpha}$ también lo es. Justifique cada paso.

Como α es raíz entonces $P(\alpha) = 0$ y $\overline{P(\alpha)} = \overline{0} = 0$. Por otro lado, utilizando propiedades del conjugado con la suma y el producto tenemos que:
$\overline{P(\alpha)} = \overline{a_n\alpha^n + a_{n-1}\alpha^{n-1} + \cdots + a_1\alpha + a_0} = \overline{a_n\alpha^n} + \overline{a_{n-1}\alpha^{n-1}} + \cdots + \overline{a_1\alpha} + \overline{a_0} = \overline{a_n}\overline{\alpha^n} + \overline{a_{n-1}}\overline{\alpha^{n-1}} + \cdots + \overline{a_1}(\overline{\alpha}) + \overline{a_0}$.

Además, como $a_i \in \mathbb{R}$ para todo i, $a_i = \overline{a_i}$ y utilizando la propiedad del conjugado con el producto nuevamente llegamos a que lo anterior es igual a:
$a_n\overline{\alpha}^n + a_{n-1}\overline{\alpha}^{n-1} + \cdots + \overline{a_1}(\overline{\alpha}) + \overline{a_0} = P(\overline{\alpha})$.

En conlusión, $P(\overline{\alpha}) = \overline{P(\alpha)} = 0$ y $\bar{\alpha}$ es raíz de P.

(b) Sabiendo que $P(z) = z^3 - 5z^2 + 8z - 6$ tiene raíz $1 + i$ halle las raíces restantes.

Como $P(z)$ es un polinomio con coeficientes reales, utilizando la parte anterior, $1-i$ también es raíz y $Q(z) = (z - (1+i))(z - (1-i)) = z^2 - 2z + 2$ divide a $P(z)$. Dividiendo $P(z)$ entre $Q(z)$ obtenemos el polinomio $z - 3$ y deducimos que la raíz restante es 3.

(c) Considere la función $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ dada por $f(z) = (1+i)z$ ¿Qué movimiento geométrico representa? Halle sus elementos.

La función f representa una rotohomotecia de razón $\sqrt{2}$, ángulo $\frac{\pi}{4}$ y centro en el origen.

Ejercicio 2: (5 puntos)

(a) Defina límite de una sucesión.

Ver teórico definición 73.

(b) Analice la convergencia de las siguientes sucesiones. Explique.

- $a_n = (-1)^n \frac{(2^n+4)}{(3^n-5)}$.
  $\lim_{n\to+\infty}(-1)^n \frac{(2^n+4)}{(3^n-5)} = \lim_{n\to+\infty}(-1)^n(\frac{2}{3})^n$ y al ser $(-1)^n$ acotado y $(\frac{2}{3})^n$ tender a cero conlcuimos que el límite da cero.
- $b_n = 1 + cos(n\frac{\pi}{3})$.
  Para hallar $\lim_{n\to+\infty}(1 + cos(n\frac{\pi}{3}))$ consideremos las subsucesiones constantes $b_{6n} = 2$ y $b_{6n+3} = 0$. Al tener límites diferentes la sucesión b_n no puede converger.

Ejercicio 3: (5 puntos)

(a) Defina sucesión monótona creciente y pruebe que $a_n = \frac{-1}{n}$ lo es.

Ver teórico definición 81. Para ver que $a_n = \frac{-1}{n}$ es decreciente tenemos que $n < n+1$ por lo cual $\frac{1}{n} > \frac{1}{n+1}$ y $-\frac{1}{n} < -\frac{1}{n+1}$.

(b) Pruebe que toda sucesión monótona creciente y acotada superiormente tiene límite.

Ver teórico Teorema 1 parte 1.

Ejercicio 4: (5 puntos)

Clasifique las siguientes series y de su valor en caso de convergencia.

(a) $\sum_{n=2}^{+\infty}(\frac{1}{3})^n$.

Se trata de una serie geométrica.
$\sum_{n=2}^{+\infty}(\frac{1}{3})^n = \sum_{n=0}^{+\infty}(\frac{1}{3})^n - (\frac{1}{3})^0 - (\frac{1}{3})^1 = \frac{1}{1-\frac{1}{3}} - 1 - \frac{1}{3} = \frac{3}{2} - 1 - \frac{1}{3} = \frac{1}{6}$.

(b) $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{3}{(n+2)(n+3)}$.

$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{3}{(n+2)(n+3)} = 3\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(n+2)(n+3)}$.

Utilizando fracciones simples obtenemos que $\frac{1}{(n+2)(n+3)} = \frac{1}{n+2} - \frac{1}{n+3}$. Luego tomando $b_n = \frac{1}{n}$ y $a_n = b_{n+2} - b_{n+3}$ vemos que la serie es telescópica. La n-ésima reducida es $s_n = b_2 - b_{n+3}$ y por lo tanto $\text{lím}_{n\to+\infty} s_n = b_2 = \frac{1}{2}$. Finalmente conlcuimos que $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{3}{(n+2)(n+3)} = \frac{3}{2}$.