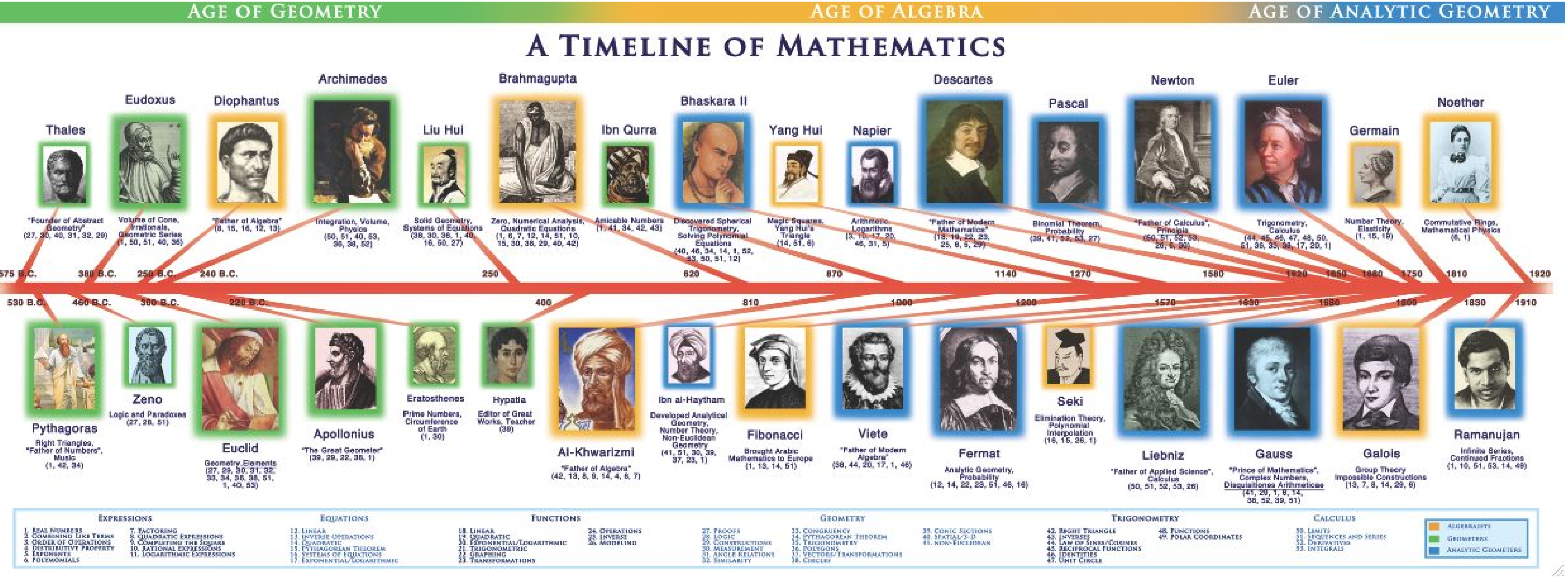
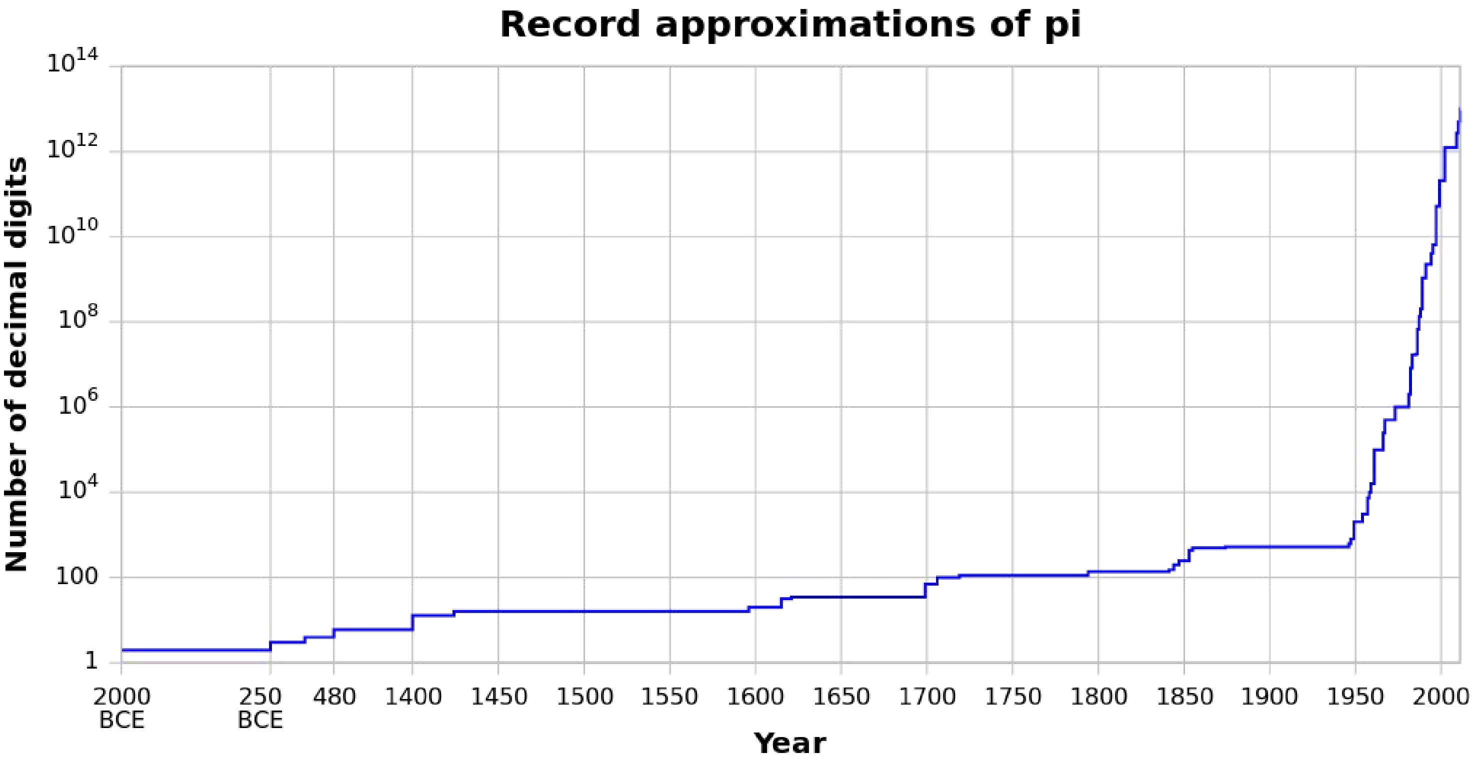


https://s10.postimg.io/56rb4cmax/math_timeline.png

1870

1715

¿Cuántos dígitos de π se conocían?



De las primeras ideas (brillantes para la época)

- Los matemáticos de Babilonia usaban π=3 (539 AC)
- Los egipcios calcularon π=256/81 ≈ 3,16 aproximando un círculo con un octágono (1600 AC)
- Zu Chongzhi (Chino) calculó π=355/113 (es de las mejores aproximaciones que hay!) (500 DC)

Todas las aproximaciones anteriores son buenas, pero no permiten seguir mejorando el error con más potencia de cálculo.

- Siglo XIV, Madhava of Sangamagrama encontró una serie que converge a π. Sumar un término más mejora la aproximación.

$$\pi = \sqrt{12}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-3)^{-k}}{2k+1} = \sqrt{12}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-\frac{1}{3})^{k}}{2k+1} = \sqrt{12}\left(1-\frac{1}{3\cdot 3}+\frac{1}{5\cdot 3^2}-\frac{1}{7\cdot 3^3}+\cdots\right)$$

Hoy en día hay mejores formas de calcular □. Mejor = más rápida.

Ta, ta, ¿pero para qué necesito tantas cifras?

Supongamos que π= 3.14 y que queremos construir una reja alrededor de nuestra piscina gigante (Sí, tenemos una piscina gigante).

La piscina tiene 100 metros de radio.

El perímetro de la piscina es entonces 2*3,14*100 = 628 metros.

Usando 6 cifras (3,141592) hubiésemos obtenido: 628,3184 metros. (Esta es más cercana a la verdad).

En conclusión, nos faltaron 30 cm de reja.

En la NASA, para proyectos en el espacio, usan 16 cifras de □.

Fuente: Scientific American

¿Qué tiene que ver Taylor con todo esto?

“Recordando” que:

$$\arctan x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \cdots + (-1)^{n-1}\frac{x^{2n-1}}{2n-1} + o(x^{2n}) \text{ cuando } x \to 0 .$$

en x=0 y que $\boxed{\arctan(1) = \pi/4}$

Podemos concluir que:

4arctan(1) = π= 4(x - (⅓)x^3 + …)

Los primeros valores de 4arctan(1)

- $4(1) = 4$ Orden 1.
- $4(1 - \frac{1}{3}) = 8/3 = 2.67$ Orden 3.
- $4(1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5}) = 52/15 = 3.467$ Orden 5.
- $4(1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - 1/7) = 304/105 = 2.9$ Orden 7.
- $4(1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - 1/7 + 1/9) = 1052/315 = 3{,}34.$ Orden 9
- $4(1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - 1/7 + 1/9 - 1/11) = 10312/3465 = 2{,}98.$ Orden 11
- $4(1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \ldots + 4/25) = 5385020324/1673196525 = 3{,}21$
- $4(1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \ldots + 4/25 - 4/27) = 15411418072/5019589575 = 3{,}07$

Se va acercando!

El error es muy grande, vamos a calcular que tanto.

TEOREMA 7.7. *Si la derivada $(n+1)$-ésima de f satisface las desigualdades*

$$m \leq f^{(n+1)}(t) \leq M \tag{7.9}$$

para todo t en un cierto intervalo que contenga a, entonces para todo x en este intervalo tenemos la estimación siguiente

$$m\frac{(x-a)^{n+1}}{(n+1)!} \leq E_n(x) \leq M\frac{(x-a)^{n+1}}{(n+1)!} \quad \text{si} \quad x > a\,, \tag{7.10}$$

y

$$m\frac{(a-x)^{n+1}}{(n+1)!} \leq (-1)^{n+1}E_n(x) \leq M\frac{(a-x)^{n+1}}{(n+1)!} \quad \text{si} \quad x < a\,. \tag{7.11}$$

¿Qué necesitamos para poder aplicar el teorema 7.7?

1. Calcular la derivada n+1 de arctan(x).
2. Investigar si a>x ó a<x.

2. El desarrollo era en 0, por lo que a=0. Por otra parte, lo estamos evaluando en x=1. De esto se desprende que x>a.

1. No es tan fácil http://www.math.nthu.edu.tw/~amen/2010/090408-2.pdf.

$$\frac{d^n}{dx^n}(\arctan x) = \frac{(-1)^{n-1}(n-1)!}{(1+x^2)^{n/2}} \sin\left(n \arcsin\left(\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}\right)\right), \quad n = 1, 2, 3, \ldots \quad (1)$$

Vamos a aproximar “e” que es más fácil

Recordamos que: $e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + o(x^n)$ cuando $x \to 0$.

Y que el valor real de “e” es:
2.71828182845904523536028747135266249775724709369995957496 6...

Sustituyendo en 1, obtenemos:

- e= 1+ 1 + ½ = 2,5. Orden 2.
- e= 1 + 1 +½ +⅙ + 1/24 = 2,708. Orden 4

Intentemos aplicar el teorema 7.7

1. Calcular la derivada n+1 de e^(x).
2. Investigar si a>x ó a<x.
1. Papita: e^x
2. a=0, x=1. a>0.

Si tomamos el intervalo: [0=a,1=x] y como sabemos que e^x es creciente, entonces tenemos que: 1 <= la derivada n+1 de e^x <= e < 3.

Podemos aplicar el teorema.

EJEMPLO 1. Si $f(x) = e^x$ y $a = 0$, tenemos la fórmula

$$e^x = \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!} + E_n(x)$$

Puesto que $f^{(n+1)}(x) = e^x$, la derivada $f^{(n+1)}$ es monótona creciente en cualquier intervalo, y por tanto satisface las desigualdades $e^b \leq f^{(n+1)}(t) \leq e^c$ en todo intervalo de la forma $[b, c]$. En un tal intervalo, las desigualdades relativas a $E_n(x)$ del teorema 7.7 se satisfacen para $m = e^b$ y $M = e^c$. En particular, cuando $b = 0$, tenemos

$$\frac{x^{n+1}}{(n+1)!} \leq E_n(x) \leq e^c \frac{x^{n+1}}{(n+1)!} \qquad \text{si} \quad 0 < x \leq c .$$

Podemos utilizar estas estimaciones para calcular el número e de Euler. Se toma $b = 0$, $c = 1$, $x = 1$, y teniendo en cuenta que $e < 3$ obtenemos

(7.13) $$e = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} + E_n(1) , \qquad \text{donde} \quad \frac{1}{(n+1)!} \leq E_n(1) < \frac{3}{(n+1)!} .$$

Ta, acotamos el error, entonces...

10! = 3628800. Con n=9   e≈2.718281525573...

1/(10!) = 0.00000027…   Es la cota inferior $\frac{x^{n+1}}{(n+1)!} \leq E_n(x)$ $\frac{1}{(n+1)!} \leq E_n(1)$

3/(10!) = 0.00000081…   Es la cota superior $E_n(x) \leq e^c \frac{x^{n+1}}{(n+1)!}$; $E_n(1) < \frac{3}{(n+1)!}$.

Si el error es positivo, nuestra aproximación es *menor* que el número real.

Si el error es negativo, nuestra aproximación es *mayor* que el número real.

En el mejor de los casos falta 0.00000027… , en el peor 0.00000081… pero seguro que en cualquier caso los 5 primeros dígitos quedan igual.

Podemos afirmar que e≈2.71828


e
celicom
desmotivaciones.es
El amor...es como el número e
infinito, irracional y MUY importante

¿Cómo probamos que e es irracional? Fácil:

EJEMPLO 2. *Irracionalidad de e.* Podemos utilizar la anterior estimación del error $E_n(1)$ para demostrar que e es irracional. Empezamos escribiendo las desigualdades (7.13) del modo siguiente:

$$\frac{1}{(n+1)!} \leq e - \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} < \frac{3}{(n+1)!} .$$

Multiplicando por $n!$, se obtiene

$$\frac{1}{n+1} \leq n!\,e - \sum_{k=0}^{n} \frac{n!}{k!} < \frac{3}{n+1} \leq \frac{3}{4} \tag{7.14}$$

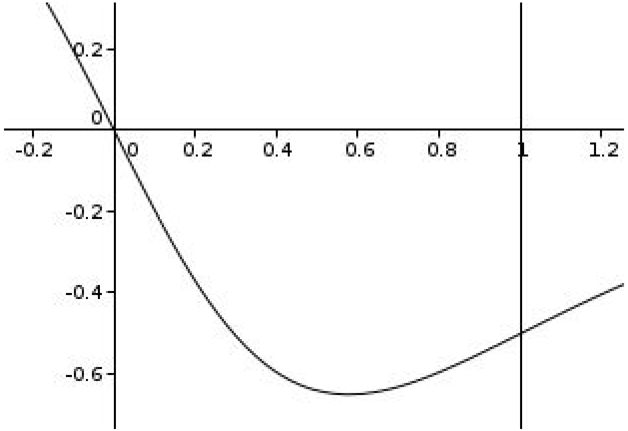
si $n \geq 3$. Para cada n la suma respecto a k es un entero. Si e fuera racional, podríamos elegir n lo bastante grande para que también $n!e$ fuese entero. Pero entonces (7.14) nos diría que la diferencia de esos dos enteros sería un número entero no mayor que $\frac{3}{4}$, lo cual es imposible. Por tanto e no puede ser racional.

En lugar de irnos por la tangente, volvamos a la (arco) tangente.

Usando el desarrollo de arctan de orden 1, calculamos □ y nos dio 4. Necesitamos la derivada segunda:

$$\frac{d^2}{dx^2}\left(\tan^{-1}(x)\right) = -\frac{2\,x}{\left(x^2+1\right)^2}$$

Y su gráfica es:



En el intervalo [0,1], el máximo se da en 0 y es 0.

El mínimo -3.raíz(3)/8 ≈ -0.65

Entonces, el error es… (ruido de redoblante en el fondo)

Aplicando el teorema 7.7

$-0.65/2! \le E_2(1) \le 0$

Es decir que: “nos pasamos de □ por algún número entre 0 y 0,325”

¿Hasta acá vamos bien?

Si no interpretamos lo que nos da, da papas fritas.

El error que calculamos, es para el desarrollo común. Nosotros trabajamos con el desarrollo multiplicado por 4.

El error entonces también debe ser multiplicado por 4.

Resumiendo:

Aproximamos $\pi \approx 4$.

Usamos el resto de taylor para deducir que nuestra aproximación es mayor que el número real. ¿Cuánto? Un número entre 0 y 1,3.

Según nuestras cuentas, $2.7 <= \pi <= 4$

¿Y si queremos hacerlo mejor?

4

We know

$$
\begin{aligned}
\arctan(x) &= \int_0^x \frac{1}{1+t^2}dt \\
&= \int_0^x \left[1 - t^2 + t^4 - \cdots + (-1)^n t^{2n-2} + \frac{(-1)^n t^{2n}}{1+t^2}\right] dt \\
&= \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(-1)^k x^{2k+1}}{2k+1} + \int_0^x \frac{t^{2n}}{1+t^2}dt \\
&= \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(-1)^k x^{2k+1}}{2k+1} + E_{2n}(x)
\end{aligned}
$$

Hence, we have $E_{2n}(x) = \displaystyle\int_0^x \frac{t^{2n}}{1+t^2}dt$ so we are just trying to bound the integral. So, we have

$$
\begin{aligned}
|E_{2n}(x)| &= \left|\int_0^x \frac{t^{2n}}{1+t^2}dt\right| \\
&= \int_0^x \frac{t^{2n}}{1+t^2}dt \qquad (\text{the integrand } \geq 0 \text{ for } t \in [0,1]) \\
&\leq \int_0^x t^{2n}dt \qquad \left(t \in [0,1] \implies t^{2n} \geq \frac{t^{2n}}{1+t^2}\right) \\
&= \frac{x^{2n+1}}{2n+1}
\end{aligned}
$$

Fuente: http://math.stackexchange.com/questions/127829/bound-for-error-term-in-taylor-expansion-of-arctan-x