Parte I. El lenguaje.

Ejercicio 1. (2 pts)
Indicar si es verdadero (V) o falso (F):

1. Si $0 \leq x < h$ para todo real h positivo $\Rightarrow x = 0$.
2. $x < y \Rightarrow \exists\ z/\ x < z < y$.
3. $x > 0 \Rightarrow \exists\ n \in \mathbb{N}/\ \frac{1}{n} < x$.
4. Existen $p, q \in \mathbb{N}$, $q \neq 0$ tales que $\frac{p^2}{q^2} = 2$.

<u>Solución</u>:

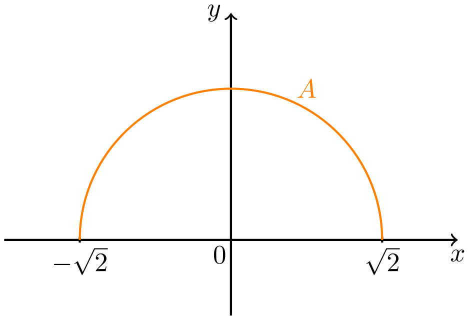
1. Verdadero. Supongamos por absurdo que $x > 0$. Tomando h tal que $0 < h < x$ (cuya existencia es asegurada, por ejemplo, por la afirmación 2.), tenemos que $0 \leq x < h < x$. Esto implica que $x < x$, lo que es absurdo.
2. Verdadero. Sea $z = \frac{x+y}{2}$. Tenemos que $z < y \iff \frac{x+y}{2} < y \iff \frac{x-y}{2} < 0$ y eso pasa pues $0 > x - y$. Por otro lado $x < z \iff x < \frac{x+y}{2} \iff 0 < \frac{y-x}{2}$ y eso también es consecuencia de que $y - x > 0$. Observar que $z = x + \frac{y-x}{2}$ y escrito de esta forma se ve que z queda entre x e y, ya que le sumamos a x algo menor que la distancia de y a x.
3. Verdadero. Si no existise un tal $n \in \mathbb{N}$, entonces para todos los naturales se tendría que $\frac{1}{n} \geq x \iff \frac{1}{x} \geq n$. Esto contradice el hecho de que los naturales no están acotados.
4. Falso. $2 = \frac{p^2}{q^2} \iff \sqrt{2} = \frac{p}{q} \iff \sqrt{2} \in \mathbb{Q}$, pero $\sqrt{2}$ no es racional.

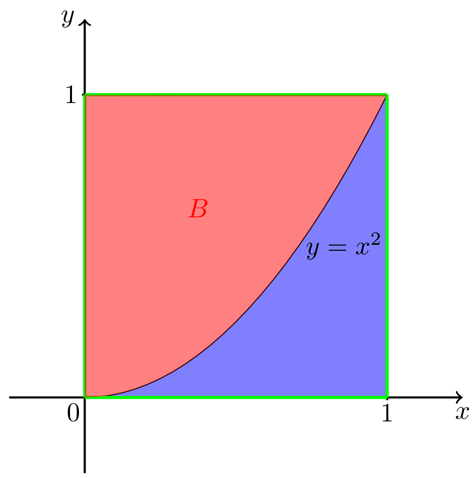
Ejercicio 2. (2 pts)

1. Dibujar los siguientes subconjuntos del plano:
$$A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 = 2, y \geq 0\},$$
$$B = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x \in [0, 1], x^2 \leq y \leq 1\}.$$
2. Calcular el área de B justificando brevemente.

<u>Solución</u>:

1. El conjunto A es la circunferencia de radio $\sqrt{2}$ y centro $(0, 0)$, intersectada con el semiplano superior $y \geq 0$, como se muestra en la primera gráfica. El conjunto B es el área roja de la segunda gráfica, que son los puntos del cuadrado $[0, 1]^2$ que quedan por encima de la gráfica de $y = x^2$.





2. En el segundo gráfico, el área azul es $\frac{1}{3}$ (ya que es el área bajo la curva $y = x^2$ con $x \in [0, 1]$ y esto fue calculado en el teórico). El área roja es el área del cuadrado $[0, 1]^2$ (pintado de verde) menos el área azul. El área del cuadrado verde es 1, por lo que el área del conjunto B es $1 - \frac{1}{3} = \frac{2}{3}$.

Ejercicio 3. (2 pts)

1. Calcular $\sum_{n=2}^{5} 2^{n-2}$.

2. Calcular $\sum_{k=1}^{n} a_k$, $a_k = 1 \forall\ k = 1, \ldots, n$.
3. Sea $f : [0, 3] \to \mathbb{R}$ definida por:

$$f(x) = \begin{cases} x, \ \ x \in [0,1) \\ 2(x-1), \ \ x \in [1,2) \\ 3(x-2), \ \ x \in [2,3) \\ 0, \ \ x = 3 \end{cases}$$

Sea $S = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x \in [0, 3], 0 \leq y \leq f(x)\}$. Indicar cuál de las siguientes sumas representa el área del conjunto S, justificando su respuesta:

a) $\sum_{i=1}^{3} \frac{1}{2} i$

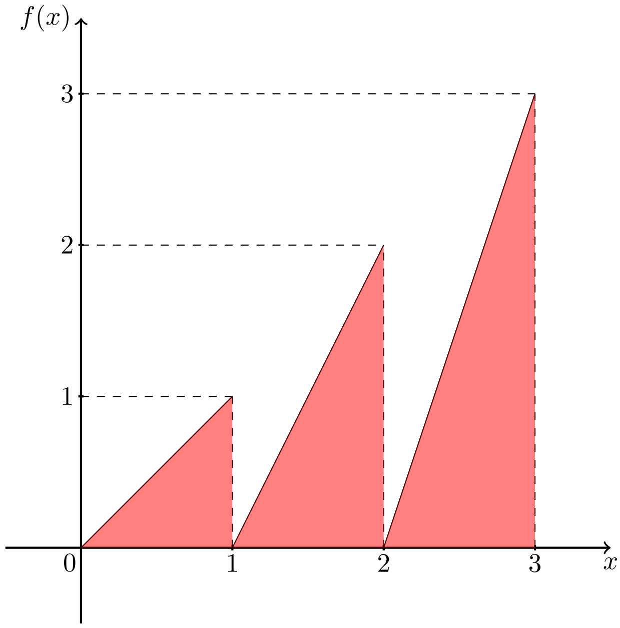
b) $\sum_{i=1}^{3} i$

c) $\sum_{i=0}^{2} (i+1)(x-i)$

d) $\sum_{i=0}^{2} (i+1)(x-i)(x_i - x_{i-1})$

Solución:

1. $\sum_{n=2}^{5} 2^{n-2} = 2^0 + 2^1 + 2^2 + 2^3 = 1 + 2 + 4 + 8 = 15$
2. $\sum_{k=1}^{n} a_k = \sum_{k=1}^{n} 1 = n$
3. En la siguiente figura se muestra el gráfico de la función f. En rojo se muestra el conjunto S.



El área del conjunto S es la suma del área de los triángulos rojos. Entonces:

$$A_S = \frac{1 \times 1}{2} + \frac{1 \times 2}{2} + \frac{1 \times 3}{2} = \sum_{i=1}^{3} \frac{1}{2} i$$

Parte II. Ejercicios de cálculo.

Ejercicio 4. (3 pts)
Hallar supremo, máximo, ínfimo y mínimo del conjunto $A = \{x \in \mathbb{R} : x^2 - \alpha \leq 0\}$, discutiendo según α. Justifique sus respuestas.

Solución:

- Si $\alpha = 0$, $A = \{0\}$ y $\sup(A) = \text{ínf}(A) = \text{máx}(A) = \text{mín}(A) = 0$.
- Si $\alpha > 0$, $A = [-\sqrt{\alpha}, \sqrt{\alpha}]$ y se tiene que $\sup(A) = \text{máx}(A) = \sqrt{\alpha}$ y $\text{mín}(A) = \text{ínf}(A) = -\sqrt{\alpha}$.
- Si $\alpha < 0$, $A = \emptyset$ y no existe ni el máximo ni el supremo, ni el ínfimo ni el mínimo.

Ejercicio 5. (2 pts)

Demostrar que $n^3 - n$ es divisible entre 3 para todo $n \geq 1$.

Solución:
Queremos probar que $n^3 - n = 3k$, con $k \in \mathbb{Z}$, para todo $n \geq 1$.

- Paso Base: Si ponemos $n = 1$ tenemos $1^3 - 1 = 0$, que es múltiplo de 3, porque $0 = 3 \times 0$.
- Paso Inductivo:
  - Hipótesis: La propiedad se cumple para n: $n^3 - n = 3k$ con $k \in \mathbb{Z}$.
  - Tesis: La propiedad se cumple para $n + 1$: $(n + 1)^3 - (n + 1) = 3r$ con $r \in \mathbb{Z}$.
  - Demostración:
    $(n + 1)^3 - (n + 1) = (n + 1)((n + 1)^2 - 1) = (n + 1)(n^2 + 2n + 1 - 1) = (n + 1)(n^2 + 2n) = n^3 + n^2 + 2n^2 + 2n = n^3 + 3n^2 + 2n$.
    Aquí es el momento de hacer aparecer la hipótesis de inducción, es decir, $n^3 - n = 3k$, por lo cual escribimos:
    $n^3 + 3n^2 + 2n = n^3 - n + 3n^2 + 3n = 3k + 3(n^2 + n) = 3(k + n^2 + n)$. Esto muestra que $(n+1)^3 - (n+1) = 3r$, con $r = k + n^2 + n$.

Parte III. Escribir la teoría.

Ejercicio 6. (4 pts)

1. Definir partición del intervalo $[a, b]$.
2. Definir función escalonada.
3. Definir integral de una función escalonada.
4. Dar un ejemplo de función escalonada y calcular su integral.
5. Demostrar que si $s : [a, b] \to \mathbb{R}$ es una función escalonada y $c \in \mathbb{R}$, entonces $\int_a^b c\ s(x)dx = c \int_a^b s(x)dx$.

Solución:

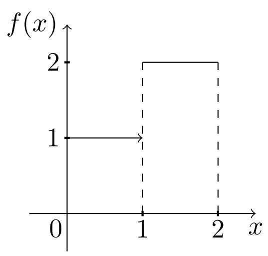
1. Se denomina partición P del intervalo $[a, b]$ a un conjunto de puntos $P = \{x_0, x_1, \ldots, x_n\}$ que satisfacen: $x_0 = a, x_n = b$ y $x_{k-1} < x_k$ para $k = 1, 2, \ldots, n$.
2. Una función $s : [a, b] \to \mathbb{R}$ se dice que es una función escalonada si existe una partición $P = \{x_0, x_1, \ldots, x_n\}$ del intervalo $[a, b]$ en la que $s(x)$ es constante en cada subintervalo abierto (x_{k-1}, x_k), para todo $k = 1, 2, \ldots, n$.
3. Sea $s(x)$ una función escalonada en $[a, b]$ y $P = \{x_0, x_1, \ldots, x_n\}$ una partición de $[a, b]$ en la que $s(x)$ es constante en cada subintervalo abierto (x_{k-1}, x_k). Definimos la integral de $s(x)$ en $[a, b]$ como:

$$\int_a^b s(x)dx = \sum_{i=1}^{n} s_k(x_i - x_{i-1})$$

   Donde $s_k = s(x)$, con $x \in (x_{k-1}, x_k)$ y $k = 1, 2, \ldots, n$.
4. Un ejemplo de función escalonada es:

$$s(x) = \begin{cases} 1, & \text{si } x \in [0, 1) \\ 2, & \text{si } x \in [1, 2] \end{cases}$$

   Gráficamente, la función s se muestra en la siguiente figura:



   Para este caso particular tenemos que:

$$\int_0^2 s(x)dx = 1 \times 1 + 1 \times 2 = 3$$

5. Sea $s : [a, b] \to \mathbb{R}$ una función escalonada y $P = \{x_0, x_1, \ldots, x_n\}$ una partición del conjunto $[a, b]$ en la que $s(x)$ es constante en cada subintervalo abierto (x_{k-1}, x_k). Entonces $cs(x)$ es una función escalonada, ya que es constante constante en cada subintervalo abierto (x_{k-1}, x_k). Si llamamos $s_k = s(x)$, con $x \in (x_{k-1}, x_k)$, tenemos que $cs(x) = cs_k$ para $x \in (x_{k-1}, x_k)$. En virtud de la definción de integral, resulta:

$$\int_a^b cs(x)dx = \sum_{i=1}^{n} cs_k(x_i - x_{i-1}) = c\sum_{i=1}^{n} s_k(x_i - x_{i-1}) = c\int_a^b s(x)dx$$