Lea el teorema I.35 en la página 36 del Apostol y conteste:

1. ¿Por qué $(1+a)^2 > a$? ¿Por qué eso implica que $1+a$ es cota superior de S?
2. ¿Por qué $\frac{a}{1+a} \in S$?
3. ¿Por qué b mayor 0? ¿Por qué hay que probar eso si en la prueba se usa b^2?
4. ¿Qué rol juega c en la demostración? Mostrar que $b > c > 0$ cuando $b^2 mayor a$
5. Explique con sus palabras el caso $a > b^2$.
6. Justifique por qué la demostración puede terminar si $b^2 = a$

Respuestas:

1. $(1+a)^2 = 1 + a^2 + 2a$. $a^2 + 2a + 1 > a \iff a^2 + a + 1 > 0$. Como $a > 0$, se prueba lo pedido. Supongamos por absurdo que $1+a$ no es cota superior de S, entonces existe un elemento $s \in S$ tal que $s > 1+a$. Como $s \in S$, es positivo por lo que se tiene que $s^2 > (1+a)^2 > a$, pero eso contradice que s esté en S, lo que prueba el absurdo.
2. $\frac{a}{1+a} \in S \iff a > (\frac{a}{1+a})^2 \iff (1+a)^2 a > a^2 \iff (1+a)^2 > a$ y eso se probó en la parte anterior.
3. Por ser b el supremo de S se tiene que $b \geq \frac{a}{1+a}$, pues está en S. Aparte, como a es positiva, se tiene que $\frac{a}{1+a}$ es positiva y por transitiva, $b > 0$.
   Necesitamos probar que b es positivo pues b será la raíz cuadrada que estamos buscando y el enunciado del teorema nos exige que sea mayor que 0. Aparte, necesito usar este dato para probar que $c > 0$.
4. En ambos casos se razona por absurdo. En las dos partes de la demostación, c es el elemento que no debería existir pero, al suponer que $b^2 > a$ o $a > b^2$ se puede encontrar.
   $$c = b - \frac{b^2 - a}{2b} = \frac{2b^2 - b^2 + a}{2b} = \frac{b^2 + a}{2b} = \frac{1}{2}(\frac{b^2 + a}{b}) = \frac{1}{2}(b + \frac{a}{b})$$
   . Como $a, b > 0$ entonces $\frac{a}{b} > 0$ y por los axiomas de orden, $c > 0$. Para probar que es menor que b, falta observar que:
   $$b > c \iff b - c > 0 \iff b - (b - \frac{b^2 - a}{2b}) > 0 \iff \frac{b^2 - a}{2b} > 0$$
   Es fácil observar que eso es verdad puesto que tanto el numerador como el denominador son positivos. Esto es porque estamos en el caso $b^2 > a$.
5. Razonando por el absurdo, se encuentra un número c de forma tal que $b + c \in S$. Como el número c elegido fue tomado mayor que 0, entonces $b + c > b$ pero se tiene que b, por ser el supremo, es mayor o igual a todos los elementos del conjunto, en particular a $b + c$. Esa es la contradicción.
6. Por la propiedad de tricotomía, si es absurdo que $b^2 > a$ y $b^2 < a$, necesariamente $b^2 = a$ y por lo tanto, existe un número no negativo (b), tal que al cuadrado es igual a a. Por definición, entonces, b es una raíz cuadrada de a. Esto concluye la prueba.