Universidad de la República
Facultad de Ingenieria
IMERL

Curso Cálculo 1 anual
2013

Título

Estudio de ecuaciones diferenciales de orden uno y algunos modelos que derivan en ellas.

Una amplia variedad de problemas en las ciencias físicas, biológicas y sociales pueden ser abordados analizando su variación en el "tiempo". Dichos modelos reciben el nombre de ecuaciones diferenciales.

En los siguientes ejercicios analizaremos problemas que involucran este tipo de modelos. No analizaremos si el modelo se ajusta bien al problema, nos quedaremos con poder expresar situaciones en términos del modelo y analizar propiedades de la solución.

Decimos que una función $y(t)$ es solución de una ecuación diferencial de orden uno si verifica

$$\dot{y}(t) = f(t, y(t))$$

donde $f(t, y)$ es una expresión que involucra las variables t e y (una función de dos variables) conocida. Decimos que es de orden uno puesto que la derivada de orden mayor que aparece en la expresión es la primera. En general omitimos la variable t cuando escribimos la función y, es decir, escribimos simplemente $\dot{y} = f(t, y)$.

Un caso particularmente sencillo es el caso de las *ecuaciones diferenciales autónomas en* $\mathbb{R}$, con estas nos estamos refiriendo a ecuaciones de la forma $\dot{y} = f(y)$, donde el dominio de f es un abierto $\Omega \subset \mathbb{R}$.

Soluciones de una ecuación:
Nuestro primer paso será introducir una definición de soluciones para las ecuaciones diferenciales.

Definición 1 (Solución de una ecuación diferencial autónoma)

Sea $f : \Omega \to \mathbb{R}$ continua. Decimos que $y : I \subset \mathbb{R} \to \Omega$ es una solución de la ecuación diferencial

$$\dot{y} = f(y)$$

si se cumple

$$\dot{y}(t) = f(y(t)), \ \ \forall\, t \in I$$

Ejemplo 0.1

Consideremos la ecuación diferencial $\dot{y} = y + 1$, que corresponde a tomar $f(y) = y + 1$. Observar que la función $y(t) = e^t + 1$ es una solución que está definida en todo $\mathbb{R}$. Para verificarlo no hay más que sustituir $y(t)$ por su expresión, al calcular la derivada obtenemos

$$\dot{y}(t) = \frac{d(e^t - 1)}{dt} = e^t$$

en tanto que $1 + y(t) = 1 + (e^t - 1) = e^t$. En conclusión, hemos encontrado (mágicamente quizás) una solución de la ecuación. También $y(t) = 3e^t - 1$ es solución de la ecuación, y en general lo es cualquier función de la forma

$$y(t) = ce^t - 1$$

Ejercicio 1

Mostrar que para cualquier constante $c > 0$, la función

$$y(t) = \sqrt{2t + c}$$

definida en el intervalo $(-\infty, \frac{c}{2})$ es una solución de la ecuación $\dot{x} = \frac{1}{x}$

Observación: Interpretación geométrica de una ecuación diferencial ordinaria

El hecho de que una función $y(t)$ sea solución de una ecuación diferencial ordinaria $\dot{y} = f(y)$ tiene una interpretación geométrica muy clara, la pendiente (el valor de la derivada) de $y(t)$ en cada punto t coincide con el valor de $f(y(t))$. En otras palabras, si en cada punto del plano (t, y) dibujamos la recta con pendiente $f(y)$ y luego graficamos una solución $y(t)$ de la ecuación diferencial, encontraremos que en cada punto $(t, y(t))$ sobre el gráfico éste es tangente a la recta que corresponde a ese punto. Dicho de otra forma, la ecuación genera lo que se denomina un *campo de pendientes* en el plano (t, y) y sus soluciones sonn curvas tangentes a ese campo.

Ejercicio 2

Realizar el campo de pendientes de la ecuación del ejemplo anterior.

Sobre la regularidad de las soluciones

Notemos que la igualdad $\dot{y}(t) = f(y(t))$ en la definición de solución de una ecuación diferencial $\dot{y} = f(y)$ exige que la derivada $\dot{y}$ exista en cada punto $t \in I$ sobre el que está definida la función $y(t)$. Esto implica que $y(t)$es una función continua de t, ¿por qué?. Por tanto, $f(y(t))$ también es continua y resulta entonces que $\dot{y}(t)$ es continua. Esto muestra que en definitiva, una solución de una ecuación diferencial es siempre de clase C^1.

Problemas de valores iniciales para una ecuación diferencial

En general una ecuación diferencial tiene muchas soluciones pero en los modelos a los que se llegan, la función $y(t)$, además de la ecuación diferencial debe verificar lo que llamamos condición inicial, $y(t_0) = y_0$ (es decir se conoce el valor en un punto).

El problema $\left\{ \begin{array}{l} \dot{y} = f(t,y) \\ y(t_0) = y_0 \end{array} \right.$ tiene solución única con condiciones de regularidad de la función $f(t,y)$ muy generales y trabajaremos en éstas condiciones.

La solución $y(t) = e^t - 1$ del primer ejemplo toma el valor $y(0) = 0$. En realidad, se puede ver que es la única solución del problema $\left\{ \begin{array}{l} \dot{y} = y + 1 \\ y(0) = 0 \end{array} \right.$.
Si queremos encontrar la solución con condición inicial $y(0) = y_0$ entonces tenemos que elegir la constante c resolviendo $c - 1 = y_0$ y la solución resulta ser

$$y(t) = (y_0 + 1)e^t - 1$$

Desintegración radiactiva

Un modelo de desintegración radiactiva se obtiene suponiendo la tasa de desintegración constante, es decir, si llamamos $q(t)$ a la cantidad de materia en el instante t

$$\frac{\dot{q}(t)}{q(t)} = \alpha$$

donde α es una constante negativa. Así la función q debe verificar la ecuación diferencial de orden uno

$$\dot{q} = \alpha\, q$$

Crecimiento de poblaciones

Una ecuación similar a la anterior puede utilizarse para modelar el crecimiento de una población, para lo cual basta suponer que la velocidad de crecimiento es directamente proporcional a la cantidad de gente en ese instante. Así obtenemos que $p(t)$, cantidad de personas en el instante t, debe verificar la ecuación diferencial de orden uno

$$\dot{p} = \alpha\, p$$

donde aquí α es una constante positiva.

Al modelo anterior, alguien podría decir que le falta considerar que cuando hay mucha población aparecen problemas que limitarán su crecimiento (falta de alimentos, problemas de coexistencia) por lo que el modelo anterior hay que modificarlo, siendo la nueva ecuación diferencia que debe verificar $p(t)$:

$$\dot{p} = a\, p - b\, p^2$$

En definitiva uno puede considerar distintos modelos, que pueden determinar distintas conclusiones.

Ejercicio 3

Consideremos la ecuación diferencial de orden uno:

$$(E) : \left\{ \begin{array}{l} y' = \alpha y \\ y(x_0) = y_0 \end{array} \right. \qquad \alpha > 0 \quad , \quad x \in \mathbb{R}$$

1. Verifique $y = 0$ (solución constante nula) es la solución de (E) con $y_0 = 0$.
2. Pruebe que si $y(x)$ es la solución para $y_0 \neq 0$, entonces $y(x) > 0\ \forall x \in \mathbb{R}$ ó $y(x) < 0\ \forall x \in \mathbb{R}$, es decir la solución es de signo constante.
3. Pruebe que si $y(x)$ es la solución para $y_0 > 0$, entonces $y(x)$ es monótona creciente.
4. Pruebe que si $y(x)$ es la solución para $y_0 > 0$, entonces $y(x)$ presenta dirección asintótica para x tendiendo a $+\infty$.
5. Analice si se mantienen las conclusiones de las dos partes anteriores o cómo cambian cuando se considera $y_0 < 0$.
6. Analice cómo varía todo el problema si cambiamos la hipótesis sobre α y consideramos $\alpha < 0$

Como hemos visto más arriba, algunas ecuaciones diferenciales pueden llegar a resolverse encontrando específicamente la expresión analítica de la función que verifica la ecuación. Los siguientes ejercicios estan orientados a este fín y para ello se recomienda consultar el libro Tom M. Apostol: Calculus. Vol I. Editorial Reverté.

Ejercicio 4

1. Resolver las siguientes ecuaciones diferenciales lineales de primer orden homogéneas, además graficar el campo de pendientes y algunos gráficos de las soluciones para diferentes condiciones iniciales.

   a) $\dot{y} + y\cos(t) = 0$

   b) $t(t-1)\dot{y} + (1-2t)y = 0$

   c) $\dot{y} - (2/t)y = 0.$

2. Hallar la solución general de las siguientes ecuaciones diferenciales de variables separables:

   a) $(1+y^2)y\dot{y} + (1+y^2) = 0$

   b) $te^{2y}\dot{y} - (1+e^{2y}) = 0.$