

TRABAJO MONOGRÁFICO

Geometría aleatoria con aplicaciones al modelado de redes inalámbricas

Autor:

Lucas LANGWAGEN

Orientadora:

Dra. Paola BERMOLEN

Licenciatura en Matemática
Facultad de Ciencias
Universidad de la República
Montevideo, Uruguay

6 de abril de 2014

Resumen

En este trabajo estudiaremos los fundamentos de la teoría de procesos puntuales y sus aplicaciones al modelado de redes inalámbricas. En particular estudiaremos modelos de tipo Matérn Hard-Core con radio fijo y radio aleatorio. En cuanto al modelado de redes inalámbricas, nos concentraremos en el análisis del desempeño de un popular protocolo de acceso al medio llamado CSMA por sus siglas en inglés (*Carrier Sense Multiple Access*).

Palabras clave: Geometría aleatoria, proceso de Poisson, proceso de Matérn Hard-Core, Carrier Sense Multiple Access.

Índice general

Introducción	6
1. Fundamentos teóricos	7
1.1. Introducción a la teoría de procesos puntuales	7
1.1.1. Medida de intensidad y medidas de momentos	8
1.1.2. Procesos estacionarios	10
1.1.3. El proceso de Poisson	11
1.1.4. Funcional de Laplace para procesos puntuales	15
1.1.5. Operaciones que preservan al proceso de Poisson	18
1.2. Teoría de Palm	22
1.2.1. Construcción formal de la distribución de Palm	22
1.2.2. Fórmulas y teoremas centrales	24
1.2.3. Distribución de Palm multidimensional	29
1.3. Procesos Marcados	30
1.3.1. Fórmulas para procesos independientemente marcados	31
1.3.2. Procesos marcados estacionarios y la distribución de Palm de las marcas	32
1.4. Shot-Noise	34
1.4.1. Shot-Noise Aditivo	34
1.4.2. Shot-Noise Extremal	38
2. Modelos de Matérn Hard-Core	39
2.1. Proceso de Matérn Hard-Core Clásico	39
2.1.1. Definición	39
2.1.2. Intensidad del p.p. de Matérn Hard-Core	41
2.1.3. Cálculo de la medida de segundos momentos	43
2.2. Proceso de Matérn Hard-Core tipo II	50
2.2.1. Definición	50
2.2.2. Intensidad del p.p. de Matérn Hard-core de tipo II	52
2.2.3. Cálculo de la medida de segundos momentos	53
3. Mecanismos de Acceso en Redes Inalámbricas	57
3.1. Modelo de Matérn con Shot-Noise Extremal	58
3.1.1. Probabilidad de acceso al medio	61
3.1.2. Probabilidad conjunta de acceso al medio	66
3.1.3. Shot-noise extremal con umbral aleatorio	70

<i>ÍNDICE GENERAL</i>	4
3.2. Modelo de Matérn con Shot-Noise Aditivo	71
3.2.1. Shot-noise aditivo con umbral determinista	71
3.2.2. Shot-noise aditivo con umbral aleatorio	73
3.3. Comparando los protocolos	75
Bibliografía	79

*A Roberto y Alicia,
por ser el mejor ejemplo.*

*A Gonzalo,
por la paciencia.*

Introducción

El objetivo de este trabajo monográfico es estudiar modelos basados en la teoría de la geometría aleatoria para algunas versiones del mecanismo de acceso al medio en redes inalámbricas conocido como CSMA (*Carrier Sense Multiple Access*). Este protocolo es muy utilizado en las redes de hoy en día debido a la simplicidad de su formulación.

Empezaremos en el capítulo 1 por desarrollar los fundamentos teóricos básicos de la Teoría de Procesos Puntuales. Esta teoría ha visto un gran desarrollo en los últimos años dadas sus múltiples aplicaciones, y hoy en día existen varias disciplinas científicas que usan construcciones y modelos similares a los que aquí presentaremos.

Lo primero que presentaremos son las definiciones más básicas para hacer una aproximación intuitiva a uno de los procesos puntuales más importantes: el proceso de Poisson. Estudiaremos sus propiedades más importantes para luego pasar al cálculo de Palm, que nos permitirá formalizar nociones muy intuitivas con toda la rigurosidad deseable (como ser, la probabilidad condicional dado que un proceso puntual tiene un punto determinista). Las últimas dos secciones del capítulo 1 serán sobre procesos puntuales marcados y shot-noise, dos objetos matemáticos de gran interés para varios modelos de la geometría aleatoria.

En el capítulo 2 estudiaremos una familia particular de procesos puntuales conocidos como los procesos de Matérn Hard-Core, que son fáciles de caracterizar y simular y son capaces de modelar eficazmente una vasta gama de distintos fenómenos. Hallaremos fórmulas explícitas para sus principales características.

Finalmente en el capítulo 3 definiremos dos posibles implementaciones del protocolo CSMA. Obtendremos medidas de su desempeño (como ser: la probabilidad de que un nodo acceda al medio en un instante dado) y compararemos ambos protocolos para redes de gran porte.

El presente trabajo está pensado como una monografía de fin de carrera de la Licenciatura en Matemática de la Universidad de la República. Como tal, los prerrequisitos que asumiremos son los conocimientos adquiridos durante el curso de la misma en las áreas de Análisis Real y Probabilidad y Estadística.

La monografía se basa principalmente en los libros de Baccelli y Blaszcyszyn ([1] y [2]) así como en los artículos por Stoyan y Stoyan ([6]) y Baccelli y Bermolen ([7]).

Todas las simulaciones y gráficos que aparecen fueron hechas por el autor de este trabajo usando Matlab .

Capítulo 1

Fundamentos teóricos

Nuestro objetivo en este capítulo es introducir las definiciones y teoremas de la geometría aleatoria que nos sean útiles para los modelos que se definirán en los capítulos siguientes. Haremos un enfoque que nos permita dar un tratamiento intuitivo de la teoría sin perder la rigurosidad matemática necesaria.

Comenzaremos por presentar las principales definiciones de la teoría de procesos puntuales, incluyendo el proceso puntual de Poisson y la teoría de Palm, para luego pasar a los procesos puntuales marcados. Todas estas herramientas nos serán necesarias para los modelos teóricos del capítulo 2. Culminaremos presentando las definiciones y principales propiedades de los Shot Noise, y de esta forma tendremos el marco teórico necesario para afrontar el capítulo 3. Principalmente nos basaremos en los libros [1] de Baccelli y [3] de Stoyan.

1.1. Introducción a la teoría de procesos puntuales

Sea \mathbb{R}^d el espacio Euclidiano de d dimensiones. Nuestro objetivo es definir formalmente la idea (intuitivamente sencilla de entender) de una elección aleatoria de puntos en \mathbb{R}^d . En el contexto de la teoría de la medida, no es difícil hacerlo: tan solo necesitamos un espacio de medida Ω y una función medible que tome valores en un conjunto de “colecciones de puntos de \mathbb{R}^d ” de nuestro interés.

Necesitamos definir entonces el espacio de llegada; ¿qué subconjuntos de \mathbb{R}^d nos interesan?. A priori, es posible hacer una teoría general de conjuntos aleatorios, pero a los efectos de nuestras aplicaciones, nos centraremos en cierta clase de subconjuntos cerrados que cumplan las siguientes propiedades:

- ▷ En primer lugar, nos interesaremos por subconjuntos numerables de \mathbb{R}^d . Esto es: de la forma $\{x_n\}_{n \in I}$, $I \subset \mathbb{N}$.
- ▷ Además pediremos que el conjunto $\{x_n\}$ sea discreto, o lo que es equivalente, que $\#(\{x_n\} \cap B) < +\infty \forall B \in \mathcal{B}_{\mathbb{R}^d}$ acotado ($\mathcal{B}_{\mathbb{R}^d}$ es el subconjunto de los Borelianos de \mathbb{R}^d). Diremos que bajo esta condición, $\{x_n\}$ es *localmente finito*.
- ▷ Más aún, intuitivamente pensamos en que cada elemento del subconjunto está definido por su posición en el espacio, por lo que no nos interesa considerar a un mismo punto varias veces. Buscamos entonces que $\{x_n\}$ sea *simple*, i.e.: $x_i \neq x_j \forall i \neq j$.

Sea entonces $[\mathbb{N}^{\mathbb{R}^d}]$ definido por:

$$[\mathbb{N}^{\mathbb{R}^d}] = \{ \{x_n\}_{n \in I} \subset \mathbb{R}^d : \{x_n\} \text{ es simple y localmente finito, } I \subset \mathbb{N} \}.$$

Definimos en $[\mathbb{N}^{\mathbb{R}^d}]$ la σ -álgebra \mathcal{N} como la mínima tal que los mapas

$$\varphi = \{x_n\} \in [\mathbb{N}^{\mathbb{R}^d}] \mapsto \varphi(B) := \#(\{x_n\} \cap B)$$

sean medibles $\forall B \in \mathcal{B}_{\mathbb{R}^d}$ acotado (queremos medir al menos los conjuntos $\{\varphi(B) = n\}$).

Tenemos entonces todos los elementos que necesitamos:

Definición 1.1.1. Un *proceso puntual* (o p.p. como abreviatura) Φ en \mathbb{R}^d es una función medible

$$\Phi : (\Omega, \mathcal{A}, P) \longrightarrow ([\mathbb{N}^{\mathbb{R}^d}], \mathcal{N}, m),$$

donde (Ω, \mathcal{A}, P) es un espacio de probabilidad y m es la medida de Lebesgue en \mathbb{R}^d .

Denotaremos por φ a una realización $\varphi = \Phi(\omega)$ donde $\omega \in \Omega$.

Observación 1.1.1. Es posible definir Φ de otras formas, y de hecho, nos será conveniente para el futuro familiarizarnos con ellas. De esta manera podremos ver a un proceso puntual bajo la interpretación que nos sea más conveniente según el contexto. Por ejemplo, un proceso Φ como el definido anteriormente también cumple que:

- Φ es un subconjunto discreto aleatorio de \mathbb{R}^d ,
- Φ es una medida aleatoria en \mathbb{R}^d que asigna a cada $B \in \mathcal{B}_{\mathbb{R}^d}$ el número $\Phi(B) := \#(\Phi \cap B)$,
- $\Phi = \sum_{n \geq 1} \delta_{X_i}$ donde δ es la medida delta de Dirac en \mathbb{R}^d y X_i es un vector aleatorio en \mathbb{R}^d .

De esta forma, si llamamos \mathbb{M} al conjunto de los procesos puntuales Φ en \mathbb{R}^d , podemos pensar que \mathbb{M} es también el espacio de las medidas de conteo en \mathbb{R}^d cuyos puntos no acumulan.

Se define la distribución de Φ de la manera evidente:

Definición 1.1.2. La *distribución de un proceso puntual* Φ es la función

$$F_\Phi : \mathcal{N} \longrightarrow [0, 1] \quad \text{tal que} \quad F_\Phi(\Gamma) = P(\Phi \in \Gamma) = P(\{\omega \in \Omega : \Phi(\omega) \in \Gamma\}).$$

1.1.1. Medida de intensidad y medidas de momentos

Anteriormente, definimos para cada $B \in \mathcal{B}_{\mathbb{R}^d}$ una variable aleatoria que llamamos $\Phi(B)$ y que asigna a cada $\omega \in \Omega$ el número $\Phi(\omega) \cap B$. Generalmente, estas son las variables que nos interesa conocer dado un proceso Φ , por eso haremos la definición siguiente:

Definición 1.1.3. La *medida de intensidad* de un p.p. Φ en \mathbb{R}^d es una medida Λ definida en la σ -álgebra $\mathcal{B}_{\mathbb{R}^d}$ de \mathbb{R}^d como:

$$\Lambda(B) = E[\Phi(B)] \quad \forall B \in \mathcal{B}_{\mathbb{R}^d}.$$

Observación 1.1.2. Si P_Φ es la distribución de Φ , otras maneras equivalentes de escribir la fórmula que define a Λ recurriendo a las múltiples interpretaciones de Φ son:

$$\Lambda(B) = \mathbb{E} \left[\sum_{X_i \in \Phi} \mathbb{1}_B(X_i) \right] = \int_{\mathbb{M}} \sum_{x_i \in \varphi} \mathbb{1}_B(x_i) \, dP_\Phi(\varphi) = \int_{\mathbb{M}} \int_{\mathbb{R}^d} \mathbb{1}_B(x) \, d\varphi(x) \, dP_\Phi(\varphi).$$

La medida de intensidad está entonces vinculada a la media de las variables $\Phi(B)$, que representan el número medio de puntos en cada conjunto $B \in \mathcal{B}_{\mathbb{R}^d}$. El interés por conocer además los momentos de orden mayor nos lleva a la siguiente definición:

Definición 1.1.4. La *medida de momentos de orden n* de un p.p. Φ en \mathbb{R}^d es una medida $\mu^{(n)}$ definida en la σ -álgebra $\mathcal{B}_{(\mathbb{R}^d)^n}$ de $(\mathbb{R}^d)^n$ como:

$$\mu^{(n)}(B_1 \times \dots \times B_k) = \mathbb{E} [\Phi(B_1) \dots \Phi(B_k)] \quad \forall B_i \in \mathcal{B}_{(\mathbb{R}^d)^n}, \quad k \in \mathbb{N}.$$

Observación 1.1.3. Nuevamente tenemos otra manera de expresar $\mu^{(n)}$:

$$\mu^{(n)}(B_1 \times \dots \times B_k) = \mathbb{E} \left[\sum_{X_1, \dots, X_k \in \Phi} \prod_{i=1}^k \mathbb{1}_{B_i}(X_i) \right].$$

En algunos casos (como en los procesos puntuales que trabajaremos en el capítulo 2), ocurre que $\mu^{(2)}$ no tiene una densidad respecto a la medida de Lebesgue n , por lo cual puede ser útil trabajar con otra medida que definiremos a continuación.

Definición 1.1.5. La *medida factorial de momentos de orden n* es una medida $\alpha^{(n)}$ definida en la σ -álgebra $\mathcal{B}_{(\mathbb{R}^d)^n}$ de $(\mathbb{R}^d)^n$ como:

$$\alpha^{(n)}(B_1 \times \dots \times B_k) = \mathbb{E} \left[\sum_{\substack{X_1, \dots, X_k \in \Phi \\ X_i \neq X_j \quad \forall i \neq j}} \prod_{i=1}^k \mathbb{1}_{B_i}(X_i) \right] \quad \forall B_i \in \mathcal{B}_{(\mathbb{R}^d)^n}, \quad k \in \mathbb{N}.$$

Además, si $\alpha^{(n)}$ admite una densidad $\rho^{(n)}$, esta se llama la *densidad producto de orden n* .

Directamente de las definiciones anteriores podemos demostrar lo siguiente:

Proposición 1.1.1. Si Φ es un p.p. en \mathbb{R}^d con medida de intensidad Λ , medida de segundos momentos μ^2 y medida factorial de segundos momentos α^2 , entonces:

$$1) \quad \mu^2(B_1 \times B_2) - \alpha^2(B_1 \times B_2) = \mathbb{E} \left[\sum_{X \in \Phi} \mathbb{1}_{B_1 \cap B_2}(X) \right] = \mathbb{E} [\Phi(B_1 \cap B_2)] = \Lambda(B_1 \cap B_2).$$

$$2) \quad \text{V}[\Phi(B)] = \mu^2(B \times B) - (\Lambda(B))^2 \text{ es la varianza de la variable } \Phi(B).$$

$$3) \quad \text{Cov}(\Phi(B_1), \Phi(B_2)) = \mu^2(B_1 \times B_2) - \Lambda(B_1)\Lambda(B_2) \text{ es la covarianza entre las variables } \Phi(B_1) \text{ y } \Phi(B_2).$$

■

1.1.2. Procesos estacionarios

Vamos a describir ahora cierta clase de procesos que son importantes pues son los que generalmente se usan a la hora de modelar situaciones reales. Para estos p.p. particulares, la medida de intensidad quedará caracterizada por una constante positiva.

Definición 1.1.6. Un p.p. $\Phi = \{X_n\}_{n \in I}$ en \mathbb{R}^d se dice *estacionario* si su distribución es invariante por traslaciones. Dicho de otra forma: si dado $x \in \mathbb{R}^d$ se define $\Phi_x = \{X_n + x\}_{n \in I}$ entonces se cumple que:

$$P(\Phi \in \Gamma) = P(\Phi_x \in \Gamma) \quad \forall \Gamma \in \mathcal{N}.$$

Observación 1.1.4. En particular, tomando $\Gamma = \{\Phi(B) = n\}$ tenemos que $\Phi(B)$ y $\Phi_x(B)$ tienen la misma distribución $\forall B \in \mathcal{B}_{\mathbb{R}^d}$.

Usando esto podemos probar que si Φ es estacionario entonces su medida de intensidad Λ es invariante por traslaciones:

$$\Lambda(B) = E[\Phi(B)] = E[\Phi_x(B)] = E[\Phi(B - x)] = \Lambda(B - x),$$

donde $B - x = \{y - x : y \in B\}$.

Con lo anterior más el siguiente teorema lograremos probar que la medida de intensidad de un proceso queda determinada por una constante:

Teorema 1.1.1. *Sea Λ una medida en \mathbb{R}^d invariante por traslaciones y localmente finita. Entonces $\exists \lambda > 0$ tal que $\Lambda = \lambda m$ donde m es la medida de Lebesgue en \mathbb{R}^d .*

Demostración:

Si usamos el teorema de descomposición Radon-Nykodim, tenemos que existe una función $f \geq 0$ y una medida ρ mutuamente ortogonal con m tal que:

$$\Lambda = \int f \, dm + \rho.$$

Recordemos que por un teorema del Análisis Real, toda medida definida en los borelianos de \mathbb{R}^d y localmente finita es una medida de Radon. Por este motivo, Λ es de Radon y entonces ρ también.

Sea $\mathbb{R}^d = P \sqcup M$ la descomposición de Hahn de \mathbb{R}^d con $m(P) = 0 = \rho(M)$. Como ρ es exteriormente regular (por ser de Radon):

$$\rho(M) = \inf\{\rho(U) : P \subseteq U \text{ abierto}\}.$$

Pero como $m(U) > 0$ para todo U abierto, $\rho(U) = 0$ y entonces $\rho(M) = 0$. En definitiva, $\rho \equiv 0$ en todo subconjunto de \mathbb{R}^d . Por lo tanto $\Lambda = \int f \, dm$ donde usando que Λ es invariante por traslaciones y aplicando el teorema de densidad, vemos que f cumple:

$$f(x) = \lim_{r \rightarrow 0} \frac{\Lambda(B(x, r))}{m(B(x, r))} = \lim_{r \rightarrow 0} \frac{\Lambda(B(0, r))}{m(B(0, r))} = f(0),$$

por lo cual $f \equiv \lambda$ para cierta constante $\lambda > 0$ y entonces:

$$\Lambda = \int \lambda \, dm = \lambda m.$$

■

En conclusión, por como definimos Φ , Λ es localmente finita y entonces si Φ es un p.p. estacionario, Λ cae en las hipótesis del teorema anterior. Finalmente:

$$E[\Phi(B)] = \Lambda(B) = \lambda m(B) \quad \forall B \in \mathcal{B}_{\mathbb{R}^d}.$$

Al número λ se lo llama la *intensidad* de Φ y tiene una interpretación intuitiva como *el número promedio de puntos por unidad de volumen* pues:

$$\lambda = \frac{E[\Phi(B)]}{m(B)}.$$

1.1.3. El proceso de Poisson

Buscamos definir ahora uno de los procesos puntuales más importantes y más usados los modelos de geometría aleatoria. Comenzaremos dando algunos ejemplos de p.p. más primitivos y culminaremos definiendo el *proceso puntual de Poisson*.

Uno de los ejemplos más sencillos de un proceso puntual que se puede pensar es un único punto distribuido uniformemente en una región acotada del plano $W \subset \mathbb{R}^2$ (pongamos $d = 2$ para fijar ideas). Esto sería: $\Phi = \{X\}$ donde la distribución de Φ está dada por:

$$P(\Phi(A) = 1) = P(X \in A) = \begin{cases} \frac{m(A)}{m(W)} & \text{si } A \subseteq W, \\ 0 & \text{en otro caso,} \end{cases} \quad (1.1)$$

$$P(\Phi(A) = 0) = 1 - P(\Phi(A) = 1).$$

Generalicemos esta idea: tomemos un vector aleatorio (X_1, \dots, X_n) cuyas componentes sean independientes y distribuyan uniformemente en W . Esto nos diría que $\forall A_1, \dots, A_n \subseteq W$:

$$P(X_1 \in A_1, \dots, X_n \in A_n) = P(X_1 \in A_1) \dots P(X_n \in A_n) = \frac{m(A_1) \dots m(A_n)}{m(W)^n}. \quad (1.2)$$

Por la independencia de las X_i , podemos pensar que a nivel de la distribución, el orden en que las demos es irrelevante.

Se puede definir entonces un p.p. $\Phi_W^n = \{X_1, \dots, X_n\}$ directamente de la ecuación (1.2). Por ejemplo, la probabilidad de que no haya puntos de Φ_W^n en K es:

$$P(\Phi_W^n(K) = 0) = P(X_1 \in W \setminus K) \dots P(X_n \in W \setminus K) = \frac{(m(W) - m(K))^n}{m(W)^n}. \quad (1.3)$$

para cualquier $K \subseteq W$.

Mirando la ecuación (1.2) (y usando la misma idea que en (1.3)) podemos afirmar que $\Phi_W^n(A)$ distribuye como una binomial de parámetros n y $p = \frac{m(A)}{m(W)}$ para todo $A \subseteq W$. De modo que:

$$E[\Phi_W^n(A)] = np = n \cdot \frac{m(A)}{m(W)} = \lambda m(A),$$

si llamamos $\lambda = \frac{n}{m(W)}$. Esto nos dice que $\Phi_W^n(A)$ es estacionario.

Finalmente, observemos que por la independencia de las X_i , $\Phi_W^n(A_i)$ y $\Phi_W^n(A_j)$ son independientes cuando A_i y A_j son disjuntos, por lo que la distribución de $(\Phi_W^n(A_1), \dots, \Phi_W^n(A_k))$ es la de una variable multinomial cuando los A_i son subconjuntos de W disjuntos dos a dos.

Al proceso Φ_W^n que definimos se le llama *proceso puntual binomial*. Es fácil simularlo una vez que sabemos como simular un solo punto uniforme en W . Por ejemplo, un punto (x, y) distribuido uniformemente en $[0, 1]^2$ cumple que cada una de sus coordenadas x e y distribuyen a su vez uniformemente en $[0, 1]$. Por eso, para simular Φ_W^n alcanza con pedir a un generador de número aleatorios que nos devuelva n parejas $(x_1, y_1), \dots, (x_n, y_n)$ de puntos distribuidos uniformemente en $[0, 1]$ y todos independientes entre sí.

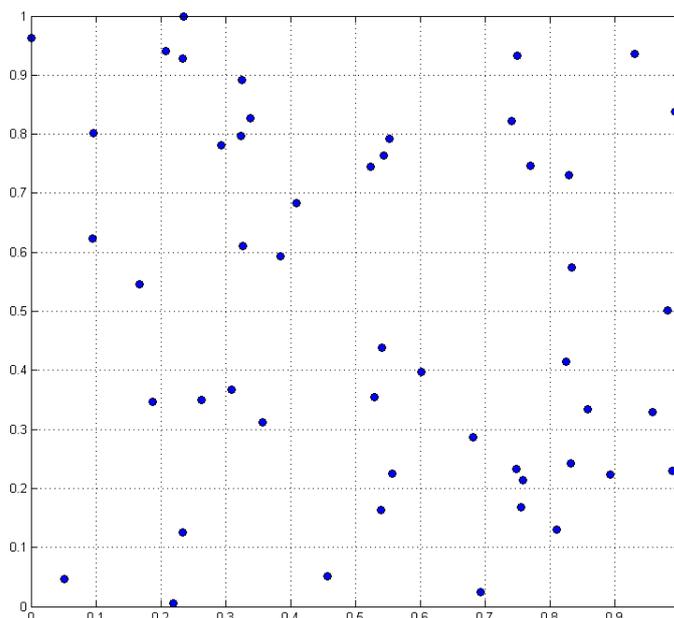


Figura 1.1: Simulación del proceso binomial Φ_W^n con $n = 50$ y $W = [0, 1]^2$

Ahora, todo esto lo estamos definiendo en una “ventana” acotada W , porque es claro que no tiene ningún sentido definir un punto distribuido uniformemente en el plano usando la ecuación (1.1): $\frac{m(A)}{m(W)}$ es una división entre infinito cuando $W = \mathbb{R}^2$.

Sin embargo, si podemos tomar ventanas W cada vez más grandes que tiendan a ocupar todo el plano. Intuitivamente, el proceso Φ obtenido como el “límite” de los Φ_W^n con ventanas crecientes debería ser una manera de definir una distribución “uniforme” de puntos en el plano.

Está claro que al mismo tiempo que W se agranda, p se va a 0 (recordemos que $p = \frac{m(A)}{m(W)}$), por lo tanto deberíamos pedir que n se vaya a infinito para que el proceso no degenera. Pero no dejaremos que n crezca de cualquier forma: vamos a pedir que np se mantenga constante, para que entonces la cantidad media de puntos en una región del plano A no varíe.

Bajo estas hipótesis, podemos aplicar el siguiente lema (de fácil demostración haciendo los cálculos directos) para así ver a que converge la distribución de la cantidad de puntos en A :

Lema 1.1.1. Si $\{X_n\}$ es una sucesión de v.a. tales que X_n tiene distribución $\text{Bin}(n, p_n)$ donde $n \cdot p_n = \alpha \forall n$ entonces X_n converge en distribución a Z que tiene distribución $\text{Poisson}(\alpha)$.

Concluimos entonces, que si existiera un tal proceso Φ definido como el límite de procesos $\Phi_{W_n}^n$ con $\{W_n\}$ una sucesión creciente de conjuntos, entonces la distribución de $\Phi(A)$ debería ser $\text{Poisson}(\lambda m(A))$. De esta deducción se desprende la definición que viene a continuación:

Definición 1.1.7. Dada Λ una medida sin átomos en \mathbb{R}^d , el *proceso de Poisson* Φ con intensidad Λ en \mathbb{R}^d es un p.p. que cumple que:

$$P(\Phi(A_1) = n_1, \dots, \Phi(A_k) = n_k) = \prod_{i=1}^k e^{-\Lambda(A_i)} \frac{\Lambda(A_i)^{n_i}}{n_i!}. \quad (1.4)$$

Si $\Lambda = \lambda m$ decimos que Φ es un *proceso de Poisson homogéneo* con intensidad λ .

Observación 1.1.5. Pedimos que la medida Λ sea no atómica para que no ocurra que Φ como medida puntual tenga átomos. En efecto la probabilidad $P(\Phi(\{x_0\}) > 0) = 1 - e^{-\Lambda(\{x_0\})}$ es positiva si y solo si $\Lambda(\{x_0\}) > 0$.

Observación 1.1.6. Mirando la ecuación (1.4) podemos deducir:

- La cantidad de puntos en cada subconjunto A de \mathbb{R}^d sigue una distribución de Poisson con parametro $\Lambda(A)$.
- En particular: $E[\Phi(A)] = \Lambda(A)$ de donde Λ es efectivamente la medida de intensidad en el sentido definido anteriormente.

A priori, debemos probar que un proceso así definido existe. Lo haremos en la sección siguiente.

Independencia completa

Quizás la propiedad más importante del proceso de Poisson sea la que se conoce por *Independencia Completa* (o a veces también *Aleatoriedad Completa*) y se define así:

Definición 1.1.8. Un p.p. Φ es *completamente independiente* si $\forall A_1, \dots, A_k \in \mathcal{B}_{\mathbb{R}^d}$ que sean disjuntos dos a dos, se cumple que $\Phi(A_1), \dots, \Phi(A_k)$ son variables aleatorias independientes.

De la propia definición se desprende que todo p.p. de Poisson cumple esta propiedad (alcanza con mirar la ecuación (1.4)). También era razonable suponerlo remitiéndonos a los comentarios sobre procesos puntuales Binomiales: estos cumplían que $\Phi_W^n(A_i)$ y $\Phi_W^n(A_j)$ eran independientes cuando A_i y A_j son disjuntos, por lo que parecería natural que en el “paso al límite” se mantenga esta propiedad.

La próxima pregunta es entonces, ¿qué otros procesos puntuales habrá que también sean completamente aleatorios? La respuesta la da este teorema:

Teorema 1.1.2. *Si Φ es un p.p. sin átomos en \mathbb{R}^d que tiene la propiedad de independencia completa, entonces existe una medida Λ tal que Φ es de Poisson con intensidad Λ .*

La prueba del mismo se basa en un teoremas clásicos relacionado con las distribuciones de procesos puntuales:

Teorema 1.1.3. *La distribución de un proceso puntual Φ en \mathbb{R}^d está determinada por sus distribuciones finito-dimensionales. Es decir, si Φ y Φ' son dos p.p. que cumplen:*

$$P(\Phi(B_1) = n_1, \dots, \Phi(B_k) = n_k) = P(\Phi'(B_1) = n_1, \dots, \Phi'(B_k) = n_k) \quad \forall B_i \in \mathcal{B}_{\mathbb{R}^d}, n_i \in \mathbb{N}, \forall k \in \mathbb{N},$$

entonces $\Phi = \Phi'$ casi seguramente. ■

Existe también una versión más potente de este teorema que nos será útil:

Teorema 1.1.4. *La distribución de un proceso puntual Φ en \mathbb{R}^d está determinada por sus probabilidades de vacío. Es decir, si Φ y Φ' son dos p.p. que cumplen:*

$$P(\Phi(B) = 0) = P(\Phi'(B) = 0) \quad \forall B \in \mathcal{B}_{\mathbb{R}^d},$$

entonces $\Phi = \Phi'$ casi seguramente. ■

No haremos aquí la demostración de los mismos principalmente debido a que se requiere un desarrollo teórico extenso que usaríamos exclusivamente para este propósito. Se puede encontrar más al respecto en la sección 7.3 de [4].

Demostración del teorema 1.1.2:

Para cada $A \subset \mathbb{R}^d$, se define $\Lambda(A) := -\log[P(\Phi(A) = 0)]$. Entonces, por la propiedad de completa independencia, Λ es finito aditiva, pues:

$$\begin{aligned} \Lambda(A \sqcup B) &= -\log[P(\Phi(A \sqcup B) = 0)] = -\log[P(\Phi(A) + \Phi(B) = 0)] = \\ &= -\log[P(\Phi(A) = 0, \Phi(B) = 0)] = -\log[P(\Phi(A) = 0)P(\Phi(B) = 0)] = \\ &= -\log[P(\Phi(A) = 0)] - \log[P(\Phi(B) = 0)] = \Lambda(A) + \Lambda(B). \end{aligned}$$

Como Φ es localmente finito, Λ es una medida finito-aditiva y σ -finita definida en $\mathcal{B}_{\mathbb{R}^d}$. En conclusión, se extiende a una única medida (que abusando de la notación llamamos Λ) y que cumple:

$$P(\Phi(A) = 0) = e^{-\Lambda(A)} \quad \forall A \in \mathcal{B}_{\mathbb{R}^d},$$

que son las mismas probabilidades de vacío que las de un p.p. de Poisson con intensidad Λ . Finalmente, el teorema (1.1.4) nos da el resultado buscado. ■

En conclusión, *la propiedad de aleatoriedad completa caracteriza al proceso puntual de Poisson.*

1.1.4. Funcional de Laplace para procesos puntuales

Definiremos a continuación un operador análogo a la transformada de Laplace usual para variables aleatorias y con la misma filosofía: nos servirá para caracterizar a los procesos puntuales.

Definición 1.1.9. El *funcional de Laplace* asociado a un p.p. Φ en \mathbb{R}^d se define como:

$$\mathcal{L}_\Phi(f) = \mathbb{E} \left[e^{-\int_{\mathbb{R}^d} f(x) \, d\Phi(x)} \right] = \mathbb{E} \left[e^{-\sum_{X \in \Phi} f(X)} \right].$$

para toda función $f : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}$ no negativa.

Observación 1.1.7. El funcional de Laplace **caracteriza** al proceso Φ al cual está asociado.

Para ver esto alcanza con tomar $f(x) = \sum_{i=1}^k t_i \mathbb{1}_{A_i}(x)$. En este caso, nos queda que:

$$\mathcal{L}_\Phi(f) = \mathbb{E} \left[e^{-\sum_{i=1}^k t_i \Phi(A_i)} \right] = \mathbb{E} [e^{-sX}] = \mathcal{L}_X(f),$$

donde llamamos $X = (\Phi(A_1), \dots, \Phi(A_k))$ y $s = (t_1, \dots, t_k)$. Es decir: fijando A_i y variando t_i , la transformada de Laplace de Φ coincide con la transformada de Laplace del vector aleatorio X , y este último queda caracterizado por ella.

Tenemos entonces que \mathcal{L}_Φ caracteriza la distribución de los vectores aleatorios de la forma $X = (\Phi(A_1), \dots, \Phi(A_k))$, i.e: las distribuciones finito-dimensionales. En virtud del teorema (1.1.3), Φ queda unívocamente determinado por \mathcal{L}_Φ .

A lo largo de esta sección, nos será de gran utilidad conocer la transformada de Laplace del proceso de Poisson. La calcularemos ahora:

Proposición 1.1.2. El *funcional de Laplace de un p.p. de Poisson Φ con intensidad Λ* es:

$$\mathcal{L}_\Phi(f) = e^{-\int_{\mathbb{R}^d} (1 - e^{-f(x)}) \, d\Lambda(x)}.$$

Demostración:

Sea f no negativa. Apliquemos la definición de transformada de Laplace con $g(x) = \mathbb{1}_A(x)f(x)$, $A \in \mathcal{B}_{\mathbb{R}^d}$

$$\mathcal{L}_\Phi(g) = \mathbb{E} \left[e^{-\sum_{X \in \Phi} f(X) \mathbb{1}_A(X)} \right] = \sum_{n=0}^{+\infty} \mathbb{E} \left[e^{-\sum_{X \in \Phi} f(X) \mathbb{1}_A(X)} \middle| \Phi(A) = n \right] \mathbb{P}(\Phi(A) = n).$$

Usando que Φ es Poisson, conocemos el valor de $\mathbb{P}(\Phi(A) = n)$:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_\Phi(g) &= \sum_{n=0}^{+\infty} \mathbb{E} \left[e^{-\sum_{i=1}^n f(X_i) \mathbb{1}_A(X_i)} \right] \frac{e^{-\Lambda(A)} \Lambda(A)^n}{n!} = \\ &= \sum_{n=0}^{+\infty} \int_A \dots \int_A e^{-\sum_{i=1}^n f(x_i)} \, dP_{X_n}(x_n) \dots dP_{X_1}(x_1) \frac{e^{-\Lambda(A)} \Lambda(A)^n}{n!}. \end{aligned}$$

Ahora, si X es la localización en A de un punto de Φ sabiendo que hay un tal punto, entonces X es un vector aleatorio con distribución:

$$\mathbb{P}(X \in B) = \mathbb{P}(\Phi(B) = 1 | \Phi(A) = 1) = \frac{\mathbb{P}(\Phi(B) = 1, \Phi(A \setminus B) = 0)}{\mathbb{P}(\Phi(A) = 1)} = \frac{\Lambda(B) e^{-\Lambda(B)} e^{-\Lambda(A \setminus B)}}{\Lambda(A) e^{-\Lambda(A)}} = \frac{\Lambda(B)}{\Lambda(A)},$$

por lo cual $dP_X(x) = \frac{1}{\Lambda(A)}d\Lambda(x)$. Usando esto para $dP_{X_i}(x_i)$ tenemos que:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_\Phi(g) &= \sum_{n=0}^{+\infty} \int_A \cdots \int_A e^{-\sum_{i=1}^n f(x_i)} d\Lambda(x_n) \cdots d\Lambda(x_1) \frac{e^{-\Lambda(A)}}{n!} = \\ &= e^{-\Lambda(A)} \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n!} \int_A \cdots \int_A \prod_{i=1}^n e^{-f(x_i)} d\Lambda(x_n) \cdots d\Lambda(x_1) = \\ &= e^{-\int_A 1 d\Lambda(x)} \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n!} \left(\int_A e^{-f(x)} d\Lambda(x) \right)^n = e^{-\int_A (1-e^{-f(x)}) d\Lambda(x)}. \end{aligned}$$

La demostración termina considerando una sucesión creciente de conjuntos A_k tal que $\bigcup_{k \geq 1} A_k = \mathbb{R}^d$ y aplicando el teorema de convergencia monótona a la sucesión $g_k(x) = \mathbf{1}_{A_k}(x)f(x)$. ■

Probamos a continuación un corolario de esta proposición que nos será muy útil pues lleva la esperanza de un p.p. a una integral en \mathbb{R}^d .

Corolario 1.1.1. *Si $g \in L^1(\mathbb{R}^d)$ y Φ es un p.p. de Poisson con intensidad Λ entonces*

$$\mathbb{E} \left[\int_{\mathbb{R}^d} g(x) d\Phi(x) \right] = \int_{\mathbb{R}^d} g(x) d\Lambda(x).$$

Demostración:

Sea $f = s.g$ con $s > 0$ y g no negativa. Entonces, por la proposición anterior:

$$\mathcal{L}_\Phi(g) = \mathbb{E} \left[e^{-\int_{\mathbb{R}^d} s.g(x) d\Phi(x)} \right] = e^{-\int_{\mathbb{R}^d} (1-e^{-s.g(x)}) d\Lambda(x)}.$$

Si derivamos ambos miembros de la ecuación, la igualdad tiene que mantenerse. Por un lado, obtendríamos:

$$\frac{\partial}{\partial s} \left(e^{-\int_{\mathbb{R}^d} (1-e^{-s.g(x)}) d\Lambda(x)} \right) = e^{-\int_{\mathbb{R}^d} (1-e^{-s.g(x)}) d\Lambda(x)} \times - \int_{\mathbb{R}^d} e^{-s.g(x)} g(x) d\Lambda(x).$$

y este término entonces tiene que ser igual a:

$$\frac{\partial}{\partial s} \left(\mathbb{E} \left[e^{-\int_{\mathbb{R}^d} s.g(x) d\Phi(x)} \right] \right) = \mathbb{E} \left[\frac{\partial}{\partial s} \left(e^{-\int_{\mathbb{R}^d} s.g(x) d\Phi(x)} \right) \right] = \mathbb{E} \left[e^{-\int_{\mathbb{R}^d} s.g(x) d\Phi(x)} \cdot \int_{\mathbb{R}^d} -g(x) d\Lambda(x) \right],$$

donde estamos usando que la derivada y la esperanza conmutan pues $g \in L^1(\mathbb{R}^d)$. En definitiva, la igualdad quedó:

$$\mathbb{E} \left[e^{-\int_{\mathbb{R}^d} s.g(x) d\Phi(x)} \cdot \int_{\mathbb{R}^d} g(x) d\Lambda(x) \right] = e^{-\int_{\mathbb{R}^d} (1-e^{-s.g(x)}) d\Lambda(x)} \cdot \int_{\mathbb{R}^d} e^{-s.g(x)} g(x) d\Lambda(x),$$

que al evaluar en $s = 0$ se transforma en lo que queremos. ■

Simulación de un proceso de Poisson en un conjunto acotado

Como vimos en la introducción de la sección anterior, el proceso de Poisson en una ventana acotada $W \subset \mathbb{R}^d$ guarda una relación con el proceso binomial Φ_W^n . De hecho, veremos que un proceso de Poisson homogéneo Φ en W se puede obtener como un Φ_W^N con N aleatorio. Para eso, probemos esta proposición más general:

Proposición 1.1.3. *Sea Λ una medida en \mathbb{R}^d no atómica y sean $\{N, X_1, X_2, \dots, X_n\}$ vectores aleatorios independientes entre sí tales que:*

- N tiene distribución Poisson de parámetro $\Lambda(W)$,
- Los $\{X_i\}_{i \in \mathbb{N}}$ son iid con distribución en W dada por: $P(X_i \in B) = \frac{\Lambda(B \cap W)}{\Lambda(W)}$.

Entonces $\Phi = \sum_{k=1}^N \delta_{X_k}$ es un p.p. de Poisson con medida de intensidad $\Lambda' = \Lambda(\cdot \cap W)$.

Demostración:

Sea $f \geq 0$. Calcularemos el funcional de Laplace asociado al proceso Φ definido como en el enunciado de la proposición:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_\Phi(f) &= \mathbb{E} \left[e^{-\sum_{X \in \Phi} f(X)} \right] = \sum_{n=0}^{+\infty} \mathbb{E} \left[e^{-\sum_{X \in \Phi} f(X)} \mid N = n \right] P(N = n) = \\ &= \mathbb{E}[e^{-0}]P(N = 0) + \sum_{n=1}^{+\infty} \mathbb{E} \left[e^{-\sum_{i=1}^n f(X_i)} \right] \frac{e^{-\Lambda(W)} (\Lambda(W))^n}{n!} = \\ &= e^{-\Lambda(W)} \left[1 + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(\Lambda(W))^n}{n!} \int \prod_{i=1}^n e^{-f(x_i)} dP_{X_1}(x_1) \dots dP_{X_n}(x_n) \right]. \end{aligned}$$

Como las variables $\{X_i\}_{i \in \mathbb{N}}$ tienen distribución uniforme en W , tenemos que $dP_X(x) = \frac{1}{\Lambda(W)} d\Lambda(x)$ y entonces:

$$\mathcal{L}_\Phi(f) = e^{-\Lambda(W)} \left[1 + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n!} \int \prod_{i=1}^n e^{-f(x_i)} d\Lambda(x_1) \dots d\Lambda(x_n) \right] = \quad (1.5)$$

$$= e^{-\Lambda(W)} \left[1 + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n!} \left(\int_W e^{-f(x)} d\Lambda(x) \right)^n \right] = \quad (1.6)$$

$$= e^{-\int_W 1 d\Lambda(x)} \cdot e^{\int_W e^{-f(x)} d\Lambda(x)} = e^{-\int_{\mathbb{R}^d} (1 - e^{-f(x)}) d\Lambda'(x)}. \quad (1.7)$$

En virtud de la proposición (1.1.2), Φ es un p.p. de Poisson con medida de intensidad $\Lambda' = \Lambda(\cdot \cap W)$. ■

La proposición anterior nos dice entonces que para simular un proceso de Poisson en una región del plano W alcanza con sortear la cantidad de puntos N con distribución $\text{Poisson}(\Lambda(W))$ y luego simular N vectores aleatorios que distribuyan uniformemente según la ley de Λ . En el caso homogéneo ($\Lambda = \lambda m$), es equivalente a elegir N como antes y luego simular Φ_W^N el proceso Binomial en W . En particular, la figura (1.1) es una simulación adecuada para un p.p. de Poisson homogéneo. Las siguientes figuras ilustran casos no homogéneos:

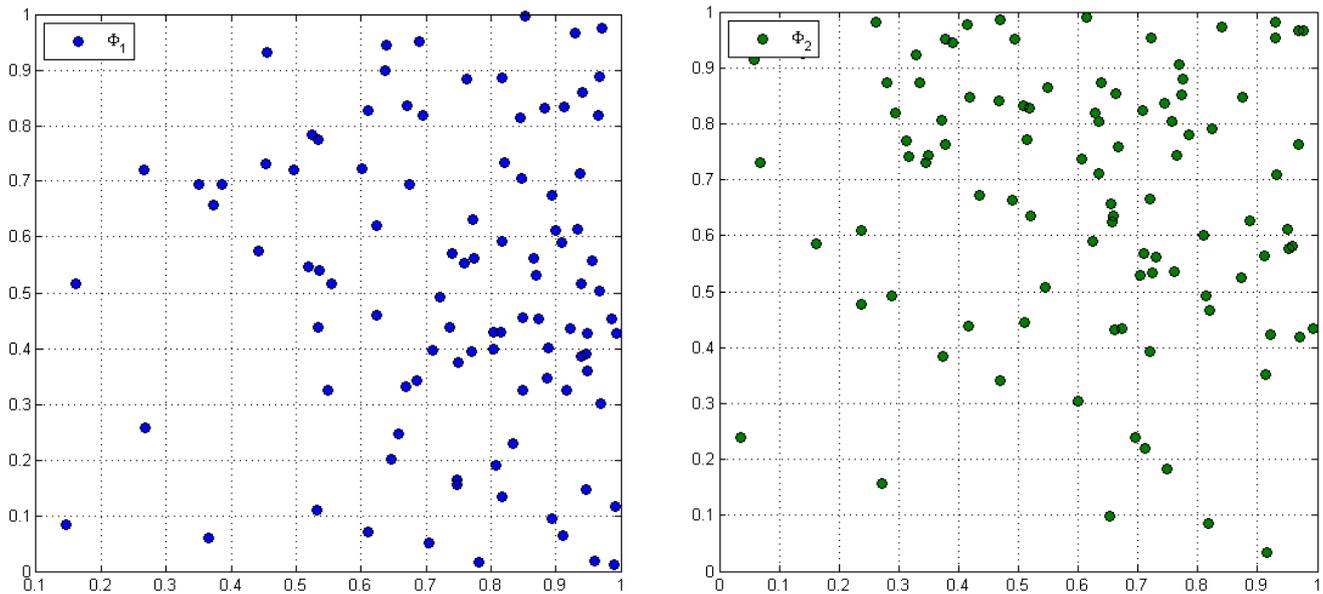


Figura 1.2: Simulación de dos p.p. de Poisson Φ_1 y Φ_2 en $[0, 1]$ donde $d\Lambda_1(x, y) = 200x \, dx dy$ y $d\Lambda_2(x, y) = 400xy \, dx dy$ (la cantidad de puntos tiene distribución Poisson de parámetro 100 en ambos casos)

1.1.5. Operaciones que preservan al proceso de Poisson

Gracias a la proposición (1.1.2) podremos demostrar que la propiedad de ser Poisson se mantiene bajo ciertas transformaciones de procesos puntuales.

Definición 1.1.10. Superposición

Si $\{\Phi_k\}_{k \in I \subset \mathbb{N}}$ son procesos puntuales tales que la medida $\sum_k E[\Phi_k(\cdot)]$ es localmente finita, se define la *superposición* de los p.p. $\{\Phi_k\}$ como el p.p. Φ definido por $\Phi = \sum_k \Phi_k$.

La condición que pedimos es suficiente para afirmar que así definido, Φ es localmente finito y se ajusta a la definición que dimos de proceso puntual. Notemos que en esta definición entra en juego la interpretación de los procesos puntuales como medidas aleatorias.

Ahora vamos a probar que la superposición es una operación que cumple lo que buscamos:

Proposición 1.1.4. *La superposición de los p.p. de Poisson $\{\Phi_k\}_{k \in I}$ independientes con intensidades $\{\Lambda_k\}_{k \in I}$ es un p.p. de Poisson Φ con intensidad $\Lambda = \sum_k \Lambda_k$ siempre que $\sum_k \Lambda_k$ sea localmente finita.*

Demostración:

Como pedimos que $\sum_k \Lambda_k$ sea localmente finita, podemos asegurar que Φ es un proceso puntual. Basta entonces con calcular su funcional de Laplace y ver que coincide con el del p.p. de Poisson buscado. Para eso, tomemos $f \geq 0$. Entonces:

$$\mathcal{L}_\Phi(f) = \mathbb{E} \left[e^{-\int_{\mathbb{R}^d} f(x) \, d\Phi(x)} \right] = \mathbb{E} \left[e^{-\sum_k \int_{\mathbb{R}^d} f(x) \, d\Phi_k(x)} \right] = \mathbb{E} \left[\prod_{k \geq 1} e^{-\int_{\mathbb{R}^d} f(x) \, d\Phi_k(x)} \right].$$

Ahora, para cada k , usando la notación $\Phi_k = \{X_j^k\}_{j \in \mathbb{N}}$ llamemos: $Z_k := \int_{\mathbb{R}^d} f(x) \, d\Phi_k(x) = \sum_{j \geq 1} f(X_j^k)$.

Interpretamos entonces que la independencia de las Φ_k se traduce en la independencia de las secuencias de vectores $\{X_j^k\}_{j \in \mathbb{N}}$. En conclusión: las variables aleatorias $\{Z_k\}$ son independientes entre sí. Seguimos entonces la demostración usando la propiedad de la esperanza respecto al producto de variables independientes y la proposición (1.1.2):

$$\mathcal{L}_\Phi(f) = \prod_{k \geq 1} \mathbb{E} \left[e^{-\int_{\mathbb{R}^d} f(x) \, d\Phi_k(x)} \right] = \prod_{k \geq 1} e^{-\int_{\mathbb{R}^d} (1-e^{-f(x)}) \, d\Lambda_k(x)} = e^{-\sum_{k \geq 1} \int_{\mathbb{R}^d} (1-e^{-f(x)}) \, d\Lambda_k(x)}.$$

En conclusión:

$$\mathcal{L}_\Phi(f) = e^{-\int_{\mathbb{R}^d} (1-e^{-f(x)}) \, d\sum_{k \geq 1} \Lambda_k(x)} = e^{-\int_{\mathbb{R}^d} (1-e^{-f(x)}) \, d\Lambda(x)}.$$

■

Simulación de procesos puntuales de Poisson en \mathbb{R}^d

Vimos anteriormente como simular un proceso de Poisson en una ventana acotada. Ahora, gracias a la proposición (1.1.4) podremos construir un p.p. de Poisson en todo \mathbb{R}^d :

Sea Λ la medida de intensidad del proceso Φ que queremos simular. Consideremos $\{W_k\}_{k \geq 1}$ una partición de \mathbb{R}^d en subconjuntos acotados. La proposición (1.1.3) nos da la manera de construir procesos Φ_k con medida de intensidad $\Lambda_k = \Lambda(\cdot \cap W_k)$ de manera que Φ_k sea un proceso de Poisson. Como las ventanas W_k son disjuntas, podemos hacer una secuencia independiente de p.p. de Poisson $\{\Phi_k\}$ de la misma forma que antes y por lo tanto, el proceso $\Phi = \sum_{k \geq 1} \Phi_k$ es de Poisson en \mathbb{R}^d .

Pasemos a la segunda transformación de p.p. que estudiaremos en esta sección. En este caso, partimos de un proceso Φ y le quitamos puntos hasta obtener un nuevo proceso al que se le llama un “refinamiento” del anterior:

Definición 1.1.11. El *refinamiento* de un p.p. $\Phi = \{X_k\}_{k \geq 1}$ con función de retención p es un nuevo p.p. Φ^p dado por:

$$\Phi^p = \sum_{k \geq 1} e_k \delta_{X_k},$$

donde e_k es una variable aleatoria tal que $P(e_k = 1 | \Phi) = 1 - P(e_k = 0 | \Phi) = p(x_k)$. Si las variables aleatorias $\{e_k\}$ son independientes entre sí, decimos que Φ^p es un *refinamiento independiente*.

La propiedad de los refinamientos que nos interesa es la siguiente:

Proposición 1.1.5. *El refinamiento independiente con función de retención p de un p.p. de Poisson Φ con medida de intensidad Λ da como resultado un p.p. de Poisson Φ^p con medida de intensidad $p\Lambda$ definida como:*

$$(p\Lambda)(A) = \int_A p(x) \, d\Lambda(x).$$

Demostración:

Sea $f \geq 0$ y $A \subset \mathbb{R}^d$ acotado. Llamemos $g = f\mathbf{1}_A$ y calculemos la transformada de Laplace de Φ^p para esta función:

$$\mathcal{L}_{\Phi^p}(g) = \sum_{n=0}^{+\infty} \mathbb{E} \left[e^{-\sum_{X \in \Phi^p} f(X)\mathbf{1}_A(X)} \middle| \Phi(A) = n \right] \mathbb{P}(\Phi(A) = n) = \sum_{n=0}^{+\infty} p_n \mathbb{P}(\Phi(A) = n). \quad (1.8)$$

Llamemos $Z_i = e_i X_i$ (donde e_i y X_i siguen la notación de la definición (1.1.11)). Entonces tenemos que $\Phi^p = \{Z_i\}_{i \in \mathbb{N}}$ y por lo tanto:

$$\begin{aligned} p_n &= \mathbb{E} \left[e^{-\sum_{X \in \Phi^p} f(X)\mathbf{1}_A(X)} \middle| \Phi(A) = n \right] = \mathbb{E} \left[e^{-\sum_{i=1}^n f(Z_i)\mathbf{1}_A(Z_i)} \right] = \prod_{i=1}^n \mathbb{E} \left[e^{-f(Z_i)\mathbf{1}_A(Z_i)} \right] = \\ &= \prod_{i=1}^n \left\{ \mathbb{E} \left[e^{-f(Z_i)\mathbf{1}_A(Z_i)} \mathbf{1}(e_i = 1) \right] + \mathbb{E} \left[e^{-f(Z_i)\mathbf{1}_A(Z_i)} \mathbf{1}(e_i = 0) \right] \right\} = \\ &= \prod_{i=1}^n \left\{ \mathbb{E} \left[e^{-f(X_i)\mathbf{1}_A(X_i)} \right] + \mathbb{P}(e_i = 0) \right\} = \\ &= \prod_{i=1}^n \left[\frac{1}{\Lambda(A)} \int_A (p(x_i)e^{-f(x_i)} + 1 - p(x_i)) \, d\Lambda(x_i) \right] = \\ &= \frac{1}{\Lambda(A)^n} \left[\int_A (p(x)e^{-f(x)} + 1 - p(x)) \, d\Lambda(x) \right]^n. \end{aligned}$$

Retomando la ecuación (1.8), llegamos a que:

$$\mathcal{L}_{\Phi^p}(g) = e^{-\int_A \mathbf{1} \, d\Lambda(x)} \sum_{n=0}^{+\infty} \left[\int_A (p(x)e^{-f(x)} + 1 - p(x)) \, d\Lambda(x) \right]^n \frac{1}{n!} = e^{-\int_A (1 - e^{-f(x)})p(x) \, d\Lambda(x)},$$

y concluimos que:

$$\mathcal{L}_{\Phi^p}(g) = e^{-\int_{\mathbb{R}^d} (1 - e^{-g(x)})p(x) \, d\Lambda(x)}.$$

Tomando una sucesión creciente de conjuntos y aplicando convergencia monótona, podemos probar que para toda función f no negativa, $\mathcal{L}_{\Phi^p}(f)$ tiene la forma de la transformada de Laplace de un p.p. de Poisson con intensidad $p\Lambda$ definida como en las hipótesis. Aplicamos finalmente la proposición (1.1.2) y deducimos lo que queríamos. ■

La última transformación que nos interesa es la siguiente:

Definición 1.1.12. Una *transformación aleatoria* (o *kernel de probabilidad*) $T(x, B)$ de \mathbb{R}^d en \mathbb{R}^l es una función tal que $T(x, \cdot) := T_x(\cdot)$ es una medida de probabilidad en \mathbb{R}^l que asigna a cada $B \subset \mathbb{R}^l$ boreliano acotado la probabilidad de que el transformado de $x \in \mathbb{R}^d$ pertenezca a B .

Definición 1.1.13. La *transformación* Φ^T de un p.p. $\Phi = \{X_i\}_{i \geq 1}$ en \mathbb{R}^d por una *transformación aleatoria* T de \mathbb{R}^d en \mathbb{R}^l es un p.p. Φ en \mathbb{R}^l definido por:

$$\Phi^T := \sum_{k \geq 1} \delta_{Y_k},$$

donde los vectores aleatorios Y_k son independientes para cada realización φ de Φ y además $P(Y_k \in B | \Phi = \{x_i\}_{i \geq 1}) = T(x_k, B)$.

He aquí el teorema que nos indica que esta transformación respeta la propiedad de ser Poisson:

Teorema 1.1.5. La *transformación* Φ^T de un p.p. Φ en \mathbb{R}^d con intensidad Λ por una *transformación aleatoria* T de \mathbb{R}^d en \mathbb{R}^l es un p.p. de Poisson en \mathbb{R}^l con intensidad Λ_T definida por:

$$\Lambda_T(A) = \int_{\mathbb{R}^d} T(x, A) d\Lambda(x).$$

Demostración:

Sea $f \geq 0$. Nuevamente, calcularemos la transformada de Laplace asociada a Φ^T para verificar que tiene la misma forma que la del p.p. de Poisson buscado:

$$\mathcal{L}_{\Phi^T}(f) = E \left[e^{-\sum_{i \geq 1} f(Y_i)} \right] = E \left[\prod_{i \geq 1} e^{-f(Y_i)} \right] = E \left[\prod_{i \geq 1} \int_{\mathbb{R}^l} e^{-f(y_i)} dF_{Y_i}(y_i) \right].$$

donde la distribución del vector aleatorio Y_i es la medida F_{Y_i} y por definición de Φ^T sabemos que cumple:

$$F_{Y_i}(B) = P(Y_i \in B) = T(X_k, B).$$

Por lo tanto $dF_{Y_i}(y) = dT(X_k, y)$ y entonces:

$$\mathcal{L}_{\Phi^T}(f) = E \left[\prod_{i \geq 1} \int_{\mathbb{R}^l} e^{-f(y_i)} dT(X_k, y_i) \right] = E \left\{ \exp \left[\sum_{i \geq 1} \log \left(\int_{\mathbb{R}^l} e^{-f(y_i)} dT(X_k, y_i) \right) \right] \right\}.$$

Ahora, si definimos la función h como

$$h(x) = -\log \left(\int_{\mathbb{R}^l} e^{-f(y)} dT(x, y) \right),$$

nos queda que, si \mathcal{L}_Φ es la transformada de Laplace de Φ :

$$\mathcal{L}_{\Phi^T}(f) = E \left[e^{-\sum_{i \geq 1} h(X_i)} \right] = \mathcal{L}_\Phi(h).$$

Usando la proposición (1.1.2) podemos llegar a que:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{\Phi^T}(f) = \mathcal{L}_{\Phi}(h) &= e^{-\int_{\mathbb{R}^d} (1-e^{-g(x)}) d\Lambda(x)} = \exp \left[- \int_{\mathbb{R}^d} \left(1 - \int_{\mathbb{R}^l} e^{-f(y)} dT(x, y) \right) d\Lambda(x) \right] = \\ &= \exp \left[- \int_{\mathbb{R}^d} \int_{\mathbb{R}^l} (1 - e^{-f(y)}) dT(x, y) d\Lambda(x) \right]. \end{aligned}$$

Por último, notemos que de la definición de Λ_T se desprende que $d\Lambda_T(y) = \int_{\mathbb{R}^d} dT(x, y) d\Lambda(x)$ por lo cual podemos concluir que:

$$\mathcal{L}_{\Phi^T}(f) = \exp \left[- \int_{\mathbb{R}^l} (1 - e^{-f(y)}) d\Lambda_T(y) \right],$$

que tiene la forma de la transformada de Laplace de un p.p. de Poisson con intensidad Λ_T . ■

1.2. Teoría de Palm

En el contexto de la geometría aleatoria, puede ser interesante considerar probabilidades condicionales del tipo $P(\Phi \text{ cumpla una propiedad } Y | 0 \in \Phi)$. Un caso particular es *la función de distancia al vecino más próximo*. Esta función se define como:

$$h(x, \Phi) := \min_{X_i \in \Phi} \|x - X_i\|,$$

por lo cual es claro que su distribución $D(r)$ se obtiene de esta forma:

$$D(r) = P(\text{el vecino más próximo a } x \text{ está a distancia menor o igual a } r) = P(\Phi(B(x, r)) > 1 | x \in \Phi).$$

En realidad, este último término no tiene ningún formalismo pues la teoría clásica de la probabilidad no define probabilidades condicionadas a sucesos con probabilidad nula, y es claro que para cualquier proceso puntual sin átomos se tiene que $P(x \in \Phi) = 0$ sin importar quien es $x \in \mathbb{R}^d$. La teoría (o cálculo) de Palm, nos permitirá formalizar la probabilidad condicional anterior usando herramientas del análisis real.

1.2.1. Construcción formal de la distribución de Palm

Definición 1.2.1. La *medida no reducida de Campbell* asociada a un p.p. Φ es una medida C en el espacio $\mathbb{R}^d \times \mathbb{M}$ (donde \mathbb{M} es el conjunto de los procesos puntuales en \mathbb{R}^d) que se define de esta manera:

$$C(A \times \Gamma) := E \left[\int_A \mathbf{1}(\Phi \in \Gamma) d\Phi(x) \right] = E \left[\sum_{x_i \in \Phi \cap A} \mathbf{1}(\Phi \in \Gamma) \right] = E[\Phi(A)\mathbf{1}(\Phi \in \Gamma)].$$

Interpretamos $C(A \times \Gamma)$ como el número medio de puntos en A que cumplen la propiedad Γ .

Observación 1.2.1. Es fácil ver que la medida de Campbell $C(\cdot \times \Gamma)$ del p.p. Φ (fijando Γ) es absolutamente continua con respecto a la medida de intensidad Λ . En efecto, sea $A \subset \mathbb{R}^d$ tal que $\Lambda(A) = 0$:

$$C(A \times \Gamma) = \mathbb{E}[\Phi(A)\mathbb{1}(\Phi \in \Gamma)] \leq \mathbb{E}[\Phi(A)] = \Lambda(A) = 0 \quad (1.9)$$

Aplicando el teorema de Radon-Nikodym, deducimos que para cada $\Gamma \subset \mathbb{M}$ existe una función positiva $P(x, \Gamma) = P_x(\Gamma)$ tal que:

$$C(A \times \Gamma) = \int_A P_x(\Gamma) \, d\Lambda(x). \quad (1.10)$$

Además, si Λ es localmente finita, usando el teorema de densidad y la ecuación (1.9) tenemos que podemos tomar $P_x(\cdot)$ como una medida de probabilidad ya que para cada $\Gamma \subset \mathbb{M}$:

$$P_x(\Gamma) = \lim_{r \rightarrow 0} \frac{C(B(x, r) \times \Gamma)}{\Lambda(B(x, r))} \leq 1$$

(la σ -aditividad de $P_x(\cdot)$ se deduce fácilmente de la σ -aditividad de C).

Definición 1.2.2. Se define la *distribución no reducida de Palm* de Φ dado el punto x como la única función $P_x(\cdot)$ (Λ - c.t.p.) que cumple la ecuación (1.10).

La interpretación infinitesimal de la derivada de Radon-Nykodim nos dice que $P_x(\Gamma)$ es la manera formal de definir la cantidad $P(\Phi \text{ cumpla la propiedad } \Gamma \mid x \in \Phi)$ que era lo que buscábamos definir.

El teorema de Slivnyak (que demostraremos en breve) motiva la definición de una medida de Palm *reducida*, simplemente porque la tesis de este teorema queda expresada de forma más elegante en términos de esta nueva medida que en términos de su versión no reducida. De todas formas, la definición es muy parecida a la anterior:

Definición 1.2.3. La *medida reducida de Campbell* asociada a un p.p. Φ es una medida $C^!$ en el espacio $\mathbb{R}^d \times \mathbb{M}$ que se define de esta manera:

$$C^!(A \times \Gamma) := \mathbb{E} \left[\int_A \mathbb{1}(\Phi - \delta_x \in \Gamma) \, d\Phi(x) \right] = \mathbb{E} \left[\sum_{X \in \Phi \cap A} \mathbb{1}(\Phi - \delta_X \in \Gamma) \right].$$

Observación 1.2.2. Al igual que antes, si fijamos Γ podemos observar que $C^!(\cdot \times \Gamma)$ es absolutamente continua con respecto a la medida de intensidad Λ . Si $A \subset \mathbb{R}^d$ es tal que $\Lambda(A) = 0$:

$$C^!(A \times \Gamma) = \mathbb{E} \left[\int_A \mathbb{1}(\Phi - \delta_x \in \Gamma) \, d\Phi(x) \right] \leq \mathbb{E} \left[\int_A d\Phi(x) \right] = \Lambda(A) = 0,$$

y entonces existe una única función $P_x^!$ (única Λ - c.t.p.) que cumple:

$$C^!(A \times \Gamma) = \int_A P_x^!(\Gamma) \, d\Lambda(x). \quad (1.11)$$

que se puede tomar como una probabilidad para cada $x \in \mathbb{R}^d$ fijo. Por lo tanto tenemos la definición:

Definición 1.2.4. La *distribución reducida de Palm* de Φ dado el punto x es la única función $P_x^!(\cdot)$ (Λ - c.t.p.) que cumple la ecuación (1.11).

Interpretamos que $P_x^!(\Gamma) = P(\Phi - \delta_x \text{ cumpla la propiedad } \Gamma | x \in \Phi)$.

1.2.2. Fórmulas y teoremas centrales

Veamos ahora algunas formulas importantes relacionadas al cálculo de Palm :

Teorema 1.2.1. Fórmulas de Campbell Para toda función $f : \mathbb{R}^d \times \mathbb{M} \rightarrow \mathbb{R}^+$ se cumple:

1. *Fórmula reducida de Campbell:*

$$\mathbb{E} \left[\int_{\mathbb{R}^d} f(x, \Phi - \delta_x) \, d\Phi(x) \right] = \iint_{\mathbb{R}^d \times \mathbb{M}} f(x, \varphi) \, dP_x^!(\varphi) \, d\Lambda(x). \quad (1.12)$$

2. *Fórmula no reducida de Campbell:*

$$\mathbb{E} \left[\int_{\mathbb{R}^d} f(x, \Phi) \, d\Phi(x) \right] = \iint_{\mathbb{R}^d \times \mathbb{M}} f(x, \varphi) \, dP_x(\varphi) \, d\Lambda(x). \quad (1.13)$$

Demostración:

Empezaremos demostrando la fórmula (1.12). Para esto, consideremos $f(x, \varphi) = \mathbf{1}(x \in A, \varphi \in \Gamma)$ para $A \subset \mathbb{R}^d$ y $\Gamma \subset \mathbb{M}$ fijos (luego haremos un argumento para f cualquiera). Por un lado, en el miembro de la izquierda en la formula reducida usamos la definición de la medida de Campbell reducida:

$$C^!(A \times \Gamma) = \mathbb{E} \left[\int_{\mathbb{R}^d} \mathbf{1}(x \in A, \Phi - \delta_x \in \Gamma) \, d\Phi(x) \right].$$

Por otro lado, el término de la derecha de la formula reducida se reescribe fácilmente como:

$$\iint_{\mathbb{R}^d \times \mathbb{M}} \mathbf{1}(x \in A, \varphi \in \Gamma) \, dP_x^!(\varphi) \, d\Lambda(x) = \int_A \int_{\Gamma} dP_x^!(\varphi) \, d\Lambda(x) = \int_A P_x^!(\Gamma) \, d\Lambda(x) = C^!(A \times \Gamma).$$

Concluimos entonces que la formula reducida de Campbell es verdadera para una función f de la forma anterior.

El caso en que f es una función simple (combinación lineal de indicatrices $\mathbf{1}(x \in A_i, \varphi \in \Gamma_i)$) es evidente por la linealidad de las integrales. Finalmente, en el caso general, consideremos una sucesión monótona creciente de funciones simples f_n que convergen a f . Como ya sabemos que la fórmula se verifica para las f_n , usamos el teorema de convergencia monótona y obtenemos que:

$$\begin{aligned}
 \mathbb{E} \left[\int_{\mathbb{R}^d} f(x, \Phi - \delta_x) \, d\Phi(x) \right] &= \mathbb{E} \left[\int_{\mathbb{R}^d} \lim_{n \rightarrow +\infty} f_n(x, \Phi - \delta_x) \, d\Phi(x) \right] = \\
 &= \lim_{n \rightarrow +\infty} \mathbb{E} \left[\int_{\mathbb{R}^d} f_n(x, \Phi - \delta_x) \, d\Phi(x) \right] = \lim_{n \rightarrow +\infty} \iint_{\mathbb{R}^d \times \mathbb{M}} f_n(x, \varphi) \, dP_x^!(\varphi) \, d\Lambda(x) = \\
 &= \iint_{\mathbb{R}^d \times \mathbb{M}} \lim_{n \rightarrow +\infty} f_n(x, \varphi) \, dP_x^!(\varphi) \, d\Lambda(x) = \iint_{\mathbb{R}^d \times \mathbb{M}} f(x, \varphi) \, dP_x^!(\varphi) \, d\Lambda(x).
 \end{aligned}$$

Queda entonces demostrada la formula (1.12). La formula (1.13) se obtiene aplicando la formula (1.12) para $g(x, \varphi) = f(x, \varphi + \delta_x)$. ■

Uno de los últimos teoremas importantes de esta sección es el ya anunciado teorema de Slivnyak, el cual nos servirá para entender por qué en muchos contextos es preferible usar la medida de Palm reducida:

Teorema 1.2.2. Slivnyak

Si Φ es un p.p. de Poisson en \mathbb{R}^d con medida de intensidad Λ y distribución P_Φ y $P_x^!$ representa a la distribución de Palm reducida en $x \in \mathbb{R}^d$ entonces:

$$P_x^! = P_\Phi \text{ para } \Lambda\text{-casi todo } x \in \mathbb{R}^d.$$

Demostración:

Si llamamos Φ_x al proceso cuya distribución es $P_x^!$, lo que querríamos probar es que $\Phi_x = \Phi$ casi seguramente. Usando el teorema (1.1.4), alcanzaría con probar que las probabilidades de vacío son las mismas para ambos procesos. Para esto, consideremos la familia de conjuntos $\Gamma_B = \{\varphi \in \mathbb{M} : \varphi(B) = 0\}$ (donde $B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$ es acotado) y verifiquemos que para ella se cumple la igualdad de las distribuciones.

Por la definición de $P_x^!$, sabemos que es la única función (Λ - ctp) que cumple la ecuación (1.11), de modo que el teorema queda demostrado si conseguimos ver que para cada $A \subset \mathbb{R}^d$ y Γ_B se cumple:

$$C^!(A \times \Gamma_B) = \int_A P(\Phi \in \Gamma_B) \, d\Lambda(x) = \Lambda(A)P(\Phi(B) = 0).$$

Usemos la definición de la medida reducida de Campbell:

$$C^!(A \times \Gamma_B) = \mathbb{E} \left[\sum_{X \in \Phi \cap A} \mathbf{1}((\Phi - \delta_X)(B) = 0) \right]. \quad (1.14)$$

Estudiaremos dos casos. El primero es cuando $A \cap B = \emptyset$ que es sencillo pues entonces $(\Phi - \delta_X) \cap B = \Phi \cap B$ (recordemos que los X varían en $\Phi \cap A$). Tenemos entonces que (1.14) resulta:

$$C^!(A \times \Gamma_B) = \mathbb{E} \left[\sum_{X \in \Phi \cap A} \mathbf{1}(\Phi(B) = 0) \right] = \mathbb{E}[\Phi(A) \mathbf{1}(\Phi(B) = 0)],$$

y usando la propiedad de independencia completa de Φ tenemos que $\Phi(A)$ e $\mathbb{1}(\Phi(B) = 0)$ son independientes por lo cual:

$$C^!(A \times \Gamma_B) = E[\Phi(A)\mathbb{1}(\Phi(B) = 0)] = E[\Phi(A)]E[\mathbb{1}(\Phi(B) = 0)] = \Lambda(A)P(\Phi(B) = 0).$$

Resta entonces estudiar el caso $A \cap B \neq \emptyset$. En este caso tenemos que $(\Phi - \delta_X) \cap B = \Phi \cap B$ para todos los $X \in A \setminus B$. Sin embargo, para los $X \in A \cap B$, tenemos que los eventos $\{(\Phi - \delta_X)(B) = 0\}$ y $\{\Phi(B) = 1\}$ son el mismo. Usando lo anterior la ecuación (1.14) se transforma en:

$$C^!(A \times \Gamma_B) = E[\Phi(A \setminus B)\mathbb{1}(\Phi(B) = 0)] + E[\Phi(A \cap B)\mathbb{1}(\Phi(B) = 1)].$$

Nuevamente, la propiedad de independencia completa nos dice que $\Phi(A \setminus B)$ e $\mathbb{1}(\Phi(B) = 0)$ son independientes, entonces la igualdad se sigue de esta forma:

$$C^!(A \times \Gamma_B) = \Lambda(A \setminus B)P(\Phi(B) = 0) + E[\Phi(A \cap B)\mathbb{1}(\Phi(B) = 1)]. \quad (1.15)$$

Por otro lado, si definimos la variable aleatoria $Z := \Phi(A \cap B)\mathbb{1}(\Phi(B) = 1)$:

- ▷ cuando $\Phi(A \cap B) = 0$, claramente $Z = 0$,
- ▷ cuando $\Phi(A \cap B) = 1$, necesariamente tiene que cumplirse que $\Phi(B \setminus A) = 0$ para que Z no se anule,
- ▷ en otro caso tenemos que $\mathbb{1}(\Phi(B) = 1) = 0 = Z$.

En conclusión, podemos afirmar que:

$$E[\Phi(A \cap B)\mathbb{1}(\Phi(B) = 1)] = E(Z) = 0 + 1 \cdot P(Z = 1) = P(\Phi(A \cap B) = 1, \Phi(B \setminus A) = 0),$$

y por la independencia completa:

$$E[\Phi(A \cap B)\mathbb{1}(\Phi(B) = 1)] = \Lambda(A \cap B)e^{-\Lambda(A \cap B)}e^{-\Lambda(B \setminus A)} = \Lambda(A \cap B)e^{-\Lambda(B)} = \Lambda(A \cap B)P(\Phi(B) = 0).$$

Volviendo a la ecuación (1.15) concluimos que:

$$C^!(A \times \Gamma_B) = \Lambda(A \setminus B)P(\Phi(B) = 0) + \Lambda(A \cap B)P(\Phi(B) = 0) = \Lambda(A)P(\Phi(B) = 0).$$

quedando así demostrado el teorema. ■

Corolario 1.2.1. *Si Φ es un p.p. de Poisson en \mathbb{R}^d con medida de intensidad Λ y distribución P_Φ y P_x representa a la distribución de Palm no reducida en $x \in \mathbb{R}^d$ entonces:*

$$P_x = P_{\Phi + \delta_x} \text{ para } \Lambda\text{-casi todo } x \in \mathbb{R}^d$$

Demostración:

Se desprende fácilmente usando que para todo $x \in \mathbb{R}^d$ y $\Gamma \subset \mathbb{R}^d$ se cumple que $P_x^!(\Gamma) = P_x(\Gamma + \delta_x) = P_x(\{\varphi + \delta_x : \varphi \in \Gamma\})$ ■

Esto se puede interpretar como que para calcular $P(\Phi \in \Gamma | x \in \Phi)$ si Φ es un p.p. de Poisson, alcanza con agregarle el punto x determinista a Φ y usar la distribución del nuevo proceso.

Al igual que ocurre con la propiedad de independencia completa, que la distribución del Poisson sea la misma que sus distribuciones de Palm es un hecho que lo caracteriza. Lo probaremos en el siguiente teorema:

Teorema 1.2.3. Mecke

Sea Φ un p.p. en \mathbb{R}^d con medida de intensidad Λ (finita en compactos). Entonces Φ es un p.p. de Poisson si y solamente si $P_x^! = P_\Phi$ para Λ -casi todo x .

Demostración:

El directo es exactamente lo que dice el teorema de Slivnyak. Para hacer el recíproco, supongamos que Φ cumple que $P_x^! = P_\Phi$. Nuestro objetivo será probar que las probabilidades de vacío de Φ son las de un proceso de Poisson (y entonces el teorema (1.1.4) nos garantiza que hemos terminado la demostración). Sea $B \subset \mathbb{R}^d$ acotado y consideremos los conjuntos $\Gamma_B = \{\varphi \in \mathbb{M} : \varphi(B) = n\}$. Entonces por definición de la medida de Campbell reducida:

$$C^!(B \times \Gamma_B) = \mathbb{E} \left[\sum_{X \in \Phi \cap B} \mathbf{1}(\Phi - \delta_X \in \Gamma_B) \right] = \mathbb{E} \left[\sum_{X \in \Phi \cap B} \mathbf{1}(\Phi(B) = n + 1) \right] = (n + 1)P(\Phi(B) = n + 1). \quad (1.16)$$

Por otro lado, si usamos la hipótesis:

$$C^!(B \times \Gamma_B) = \int_B P_x^!(\Gamma_B) d\Lambda(x) = \int_B P_\Phi(\Gamma_B) d\Lambda(x) = \Lambda(B)P(\Phi(B) = n). \quad (1.17)$$

De (1.16) y (1.17), usando un argumento de repetición se desprende que:

$$P(\Phi(B) = n + 1) = P(\Phi(B) = n) \frac{\Lambda(B)}{n + 1} = \dots = P(\Phi(B) = 0) \frac{(\Lambda(B))^{n+1}}{(n + 1)!}.$$

Esto nos permite calcular las probabilidades de vacío:

$$P(\Phi(B) = 0) = 1 - \sum_{n \geq 1} P(\Phi(B) = n) = 1 - P(\Phi(B) = 0) \sum_{n \geq 1} \frac{(\Lambda(B))^n}{n!} = 1 - P(\Phi(B) = 0)(1 - e^{-\Lambda(B)}).$$

Así obtenemos que:

$$P(\Phi(B) = 0) = e^{-\Lambda(B)},$$

que como dijimos es suficiente para terminar la demostración. ■

Veamos ahora un ejemplo clásico de aplicación del teorema de Slivnyak:

Ejemplo 1.2.1. Distribución del vecino más próximo

Retomemos la definición hecha al principio de esta sección: dados Φ un p.p. y $x \in \mathbb{R}^d$, la función de distancia al vecino más próximo de x es

$$h(x, \Phi) := \min_{X_i \in \Phi} \|x - X_i\|,$$

y habíamos concluido que su distribución $D(r)$ cumplía que $D(r) = P(\Phi(B(x, r)) > 1 | x \in \Phi)$. En el caso en que Φ es de Poisson con medida de intensidad Λ , interpretando la última probabilidad condicional como una probabilidad de Palm y usando el teorema de Slivnyak podemos concluir que:

$$D(r) = 1 - P(\Phi(B(x, r)) = 1 | x \in \Phi) = 1 - P_x^1(\Phi(B(x, r)) = 0) = 1 - P_\Phi(\Phi(B(x, r)) = 0),$$

por lo tanto:

$$D(r) = 1 - e^{-\Lambda(B(x, r))}.$$

En el caso en que Φ es estacionario con intensidad λ tenemos una expresión sumamente sencilla para D :

$$D(r) = 1 - e^{-\lambda m(B(x, r))} = 1 - e^{-\lambda r^d m(B(0, 1))},$$

que no depende del punto x .

La función h es muy usada para testear la hipótesis de que un p.p. dado es de Poisson homogéneo: como bajo la hipótesis nula la distribución de h es conocida, alcanza con realizar un test de bondad de ajuste para la distribución empírica de h .

Observación 1.2.3. El caso estacionario: definición del “punto típico”

En el ejemplo anterior, vimos que la distribución de la distancia al vecino más próximo de un punto x no depende del punto cuando Φ es de Poisson y homogéneo. Esto se desprende del hecho que la distribución reducida de Palm en este caso es estacionaria (gracias al teorema de Slivnyak). La idea es que entonces la distribución de los puntos “vistos desde x ” es la misma cuando miramos desde, digamos, el origen 0. ¿Será esta una propiedad exclusiva de los procesos de Poisson? La respuesta es que no, pues cuando Φ es estacionario hay una relación simple entre P_x y P_0 :

Empecemos por usar las notaciones $A_z = \{a + z : a \in A\}$, $\Phi + z := \{X_i + z : X_i \in \Phi\}$ y $\Gamma_z = \{\varphi + z : \varphi \in \Gamma\}$. Si C es la medida no reducida de Campbell tenemos que claramente:

$$C(A \times \Gamma_z) = E[\Phi(A)\mathbf{1}(\Phi \in \Gamma_z)] = E[\Phi(A)\mathbf{1}(\Phi - z \in \Gamma)] = E[g(\Phi)], \quad (1.18)$$

para la función g definida como $g(\Phi) = \Phi(A)\mathbf{1}(\Phi - z \in \Gamma)$. Como Φ es estacionario sabemos que la siguiente igualdad se cumple:

$$E[f(\Phi)] = E[f(\Phi + z)],$$

pues en el caso en que $f = \mathbf{1}_\Delta$ con $\Delta \subset \mathbb{M}$, es simplemente reescribir la ecuación en la definición (1.1.6) y el argumento se extiende a funciones positivas usando argumentos clásicos de convergencia monótona. En definitiva, usando lo anterior, la ecuación (1.18) se sigue de la siguiente manera:

$$C(A \times \Gamma_z) = E[g(\Phi + z)] = E[(\Phi + z)(A)\mathbf{1}(\Phi \in \Gamma)] = E[(\Phi)(A_{-z})\mathbf{1}(\Phi \in \Gamma)] = C(A_{-z} \times \Gamma).$$

Una vez que probamos esta propiedad de la medida de Campbell, usamos el teorema de densidad para calcular la distribución de Palm no reducida y obtenemos que:

$$P_x(\Gamma) = \lim_{r \rightarrow 0} \frac{C(B(x, r) \times \Gamma)}{\lambda m(B(x, r))} = \lim_{r \rightarrow 0} \frac{C(B(0, r) \times \Gamma_{-x})}{\lambda m(B(0, r))} = P_0(\Gamma_x),$$

lo cual nos dice que siempre que Φ es estacionario, el comportamiento del proceso cuando condicionamos a un punto es idéntico sin importar desde cual “miramos” al proceso (módulo realizar una traslación). Esto justifica que, por ejemplo, como ya probamos que en un p.p. de Poisson estacionario la distancia al vecino más próximo de cualquier x es exponencial, diremos que la distancia al vecino de un “punto típico” es exponencial. Es decir: siempre que la propiedad a la que nos referimos sea invariante según el punto de referencia, hablaremos de la propiedad aplicada al *punto típico* de Φ .

1.2.3. Distribución de Palm multidimensional

Siguiendo las ideas de antes, se puede definir una distribución de Palm que se interprete como el condicionamiento a que varios puntos pertenecen a un p.p. Φ . Para hacer esto, todos los razonamientos son análogos y se extienden de forma natural: primero se define una medida llamada de Campbell de orden n no reducida. La llamaremos C^n y se calcula:

$$C^n(B \times \Gamma) = E \left[\int_B^n \mathbf{1}(\Phi \in \Gamma) d\Phi(x_1) \dots d\Phi(x_n) \right].$$

Mediante argumentos similares a los realizados en la sección (1.2.1), se puede probar que esta medida tiene una densidad P^n respecto a la medida de momentos de orden n . Llamamos a esta densidad $P^n = P^n_{x_1, \dots, x_n}$ la *distribución de Palm de orden n de Φ dados x_1, \dots, x_n* . Análogamente existe la versión reducida para la medida de Campbell de orden n :

$$C^{l(n)}(B \times \Gamma) = E \left[\sum_{\substack{X_1, \dots, X_k \in \Phi \cap B \\ X_i \neq X_j \quad \forall i \neq j}} \mathbf{1}(\Phi \in \Gamma) \right],$$

que resulta tener densidad respecto a la medida factorial de momentos de orden n . Decimos que esa densidad es la *distribución de Palm reducida de orden n de Φ dados x_1, \dots, x_n* y la notamos por $P^{l(n)}_{x_1, \dots, x_n}$.

Se pueden continuar la extensión de lo que sucede en el caso unidimensional obteniendo nuevas fórmulas de Campbell, pero lo más importante será la extensión del teorema de Slivnyak a dimensiones mayores:

Teorema 1.2.4. Slivnyak en dimensión n

Sea Φ un p.p. de Poisson en \mathbb{R}^d con medida de intensidad Λ y distribución P_Φ . Si $P^{l(n)}_{x_1, \dots, x_n}$ es la *distribución de Palm reducida de orden n de Φ dados x_1, \dots, x_n* y $P^n_{x_1, \dots, x_n}$ es la *distribución de Palm no reducida de orden n de Φ dados x_1, \dots, x_n* entonces:

$$P^{l(n)}_{x_1, \dots, x_n} = P_\Phi \quad y$$

$$P^n_{x_1, \dots, x_n} = P_{\Phi + \delta_{x_1} + \dots + \delta_{x_n}}$$

para Λ -casi todo $x \in \mathbb{R}^d$.



1.3. Procesos Marcados

Estudiaremos ahora una cierta clase de procesos puntuales que surgen de considerar que cada punto x del proceso posee una información adicional además de su posición en el plano que lo diferencia del resto. Por ejemplo, si los puntos del proceso representan la posición en un bosque de los árboles, podemos querer diferenciar además la altura de cada árbol (o su especie). Si los puntos representan focos de incendios en un mapa, se puede discriminar a cada evento por sus causas o por su ocurrencia. Diremos que esta característica extra del punto es su *marca* y definiremos así los p.p. marcados:

Definición 1.3.1. Un *proceso puntual* $\tilde{\Phi}$ en \mathbb{R}^d con *marcas* en \mathbb{R}^l es un proceso puntual Φ en \mathbb{R}^d donde a cada punto $X \in \Phi$ se le asocia un vector aleatorio $m \in \mathbb{R}^l$ llamado la *marca de x* . Es decir que

$$\tilde{\Phi} = \{(X_i, m_i)\}_{i \in J \subset \mathbb{N}},$$

o mirándolo como medida aleatoria:

$$\tilde{\Phi} = \sum_{i \in \mathbb{N}} \delta_{(X_i, m_i)}.$$

Denotaremos al espacio de todos los procesos en \mathbb{R}^d con marcas en \mathbb{R}^l como $\tilde{\mathcal{M}}$.

Observación 1.3.1. Un p.p. marcado $\tilde{\Phi}$ puede verse como un p.p. en el sentido de la primera definición pero en el espacio $\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^l$. Sin embargo, $\tilde{\Phi}$ cumple ciertas propiedades que no son ciertas para p.p. en general. Por ejemplo: $\tilde{\Phi}(A \times \mathbb{R}^l) = \Phi(A) < +\infty$ para todo $A \subset \mathbb{R}^d$ boreliano acotado (usando la notación $\Phi = \{X_i\}_{i \geq 1}$, $\tilde{\Phi} = \{(X_i, m_i)\}_{i \geq 1}$).

Resulta natural hacer la siguiente definición si pensamos que las marcas de cada punto son a su vez vectores aleatorios:

Definición 1.3.2. Decimos que $\tilde{\Phi} = \{(X_i, m_i)\}_{i \geq 1}$ es un p.p. *independientemente marcado* si para cada realización $\varphi = \{x_i\}_{i \geq 1}$ de los puntos $\{X_i\}_{i \geq 1}$, los vectores aleatorios $\{m_i\}_{i \geq 1}$ son independientes. Además pediremos que si m es la marca del punto X , la distribución condicional de m dado X solo dependa de X . Es decir:

$$P(m \in K | \Phi) = P(m \in K | X) = F_X(K)$$

para cierta función F_X .

Observación 1.3.2. Notemos que no nos estamos refiriendo en ningún caso a la existencia de una tal F_X . Dejaremos intencionalmente esta cuestión para el final de la sección de procesos marcados para hacer una discusión más rica al respecto.

Observación 1.3.3. En el contexto de la definición anterior, $F_X(\cdot)$ puede pensarse como una transformación aleatoria del espacio de los puntos al espacio de las marcas. En este sentido, cada punto X es transformado en su marca m de forma aleatoria, siguiendo la ley F_X .

Este punto de vista nos será útil para probar la siguiente proposición:

Proposición 1.3.1. *Sea $\tilde{\Phi} = \{(X_i, m_i)\}_{i \geq 1}$ un p.p. independientemente marcado donde $\Phi = \{X_i\}_{i \geq 1}$ es un p.p. de Poisson con intensidad Λ y distribución condicional de las marcas F_X . Entonces $\tilde{\Phi}$ es un p.p. de Poisson en $\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^l$ con intensidad $\tilde{\Lambda}$ definida como:*

$$\tilde{\Lambda}(A \times K) := \int_A F_x(K) d\Lambda(x) = \int_A \int_K dF_x(m) d\Lambda(x),$$

y por lo tanto su funcional de Laplace tiene la forma:

$$\mathcal{L}_{\tilde{\Phi}}(\tilde{f}) = \exp \left[- \int_{\mathbb{R}^d} \left(1 - \int_{\mathbb{R}^l} e^{-\tilde{f}(x,m)} dF_X(m) \right) d\Lambda(x) \right].$$

Demostración:

Definamos $T(x, A \times K) := \mathbb{1}_A(x)F_X(K)$. Es claro que T es una transformación aleatoria de \mathbb{R}^{d+l} en $\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^l$. Por lo tanto, en virtud de la proposición (1.1.5), define un proceso $\Phi^T = \{Y_i\}_{i \geq 1} = \{(\widehat{X}_i, \widehat{m}_i)\}_{i \geq 1}$ que es un p.p. de Poisson con intensidad:

$$\Lambda^T(A \times K) = \int_{\mathbb{R}^d} T(x, A \times K) d\Lambda(x) = \int_A F_X(K) d\Lambda(x) = \tilde{\Lambda}(A \times K).$$

Solo restaría probar que para casi todo punto se cumple que $\tilde{\Phi} = \Phi^T$. Pero en efecto, por como definimos Φ^T :

$$P(\widehat{X}_i \in A | \Phi) = P(Y_i \in A \times \mathbb{R}^l | \Phi) = T(X_i, A \times \mathbb{R}^l) = \mathbb{1}_A(X_i)F_{X_i}(\mathbb{R}^l) = \mathbb{1}_A(X_i).$$

Esto nos dice que \widehat{X}_i tiene la misma distribución que X_i . De forma parecida podemos proceder con las marcas:

$$P(\widehat{m}_i \in K | \Phi) = P(Y_i \in \mathbb{R}^d \times K | \Phi) = \mathbb{1}_{\mathbb{R}^d}(X_i)F_{X_i}(K) = F_{X_i}(K) = P(m_i \in K | \Phi),$$

y así concluimos que $\widehat{m}_i = m_i$ casi seguramente. Por lo tanto tenemos que $\tilde{\Phi} = \Phi^T$ que es un p.p. de Poisson con la intensidad que buscábamos.

La forma de la transformada de Laplace $\mathcal{L}_{\tilde{\Phi}}$ se halla haciendo una aplicación directa de la proposición (1.1.2) conociendo la forma de $\tilde{\Lambda}$. ■

1.3.1. Fórmulas para procesos independientemente marcados

En esta sección presentamos las fórmulas más usadas para procesos puntuales marcados. El hecho fundamental del que se deducirán las demás fórmulas es la siguiente extensión de la proposición (1.3.1) a procesos independientemente marcados cualesquiera:

Proposición 1.3.2. *Sea $\tilde{\Phi} = \{(X_i, m_i)\}_{i \geq 1}$ un p.p. independientemente marcado con intensidad $\tilde{\Lambda}$ donde $\Phi = \{X_i\}_{i \geq 1}$ es un p.p. (no necesariamente de Poisson) con medida de intensidad Λ . Entonces:*

$$\tilde{\Lambda}(A \times K) = \int_A F_x(K) d\Lambda(x) = \int_A \int_K dF_x(m) d\Lambda(x).$$

Demostración:

Que $\tilde{\Phi}$ sea independiente marcado nos dice que $d\tilde{\Phi}(x, m) = dF_x(m)d\Phi(x)$. Entonces:

$$\tilde{\Lambda}(A \times K) = E[\tilde{\Phi}(A \times K)] = E \left[\int_{\mathbb{R}^d} \int_{\mathbb{R}^l} \mathbb{1}_A(x) \mathbb{1}_K(m) d\tilde{\Phi}(x, m) \right] = E \left[\int_{\mathbb{R}^d} \mathbb{1}_A(x) F_x(K) d\Phi(x) \right],$$

y si aplicamos la fórmula no reducida de Campbell (teorema (1.2.1)) con $f(x, \Phi) = \mathbb{1}_A(x)F_x(K)$, concluimos que:

$$\tilde{\Lambda}(A \times K) = \int_A \int_{\mathbb{M}} F_x(K) dP_x^l(\varphi) d\Lambda(x) = \int_A F_x(K) d\Lambda(x) = \int_A \int_K dF_x(m) d\Lambda(x).$$

■

Una vez demostrada esta proposición, una mera re-escritura del teorema (1.2.1) nos da:

Teorema 1.3.1. *Fórmula reducida de Campbell para procesos i.m.*

Sea $\tilde{\Phi} = \{(X_i, m_i)\}_{i \geq 1}$ un p.p. independientemente marcado con intensidad $\tilde{\Lambda}$ donde $\Phi = \{X_i\}_{i \geq 1}$ es un p.p. (no necesariamente de Poisson) con medida de intensidad Λ . Entonces para toda función no negativa \tilde{f} definida en $\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^l \times \tilde{\mathbb{M}}$ se cumple que:

$$E \left[\int_{\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^l} \tilde{f}(x, m, \tilde{\Phi} - \delta(x, m)) d\tilde{\Phi}(x, m) \right] = \int_{\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^l \times \tilde{\mathbb{M}}} \tilde{f}(x, m, \tilde{\varphi}) dP_{(x, m)}^l(\tilde{\varphi}) dF_x(m) d\Lambda(x).$$

■

En el caso particular en que Φ es de Poisson, alcanza con aplicarle a lo anterior la proposición (1.3.1) y el teorema de Slivnyak (1.2.2) para obtener:

Corolario 1.3.1. Sea $\tilde{\Phi} = \{(X_i, m_i)\}_{i \geq 1}$ un p.p. independientemente marcado con intensidad $\tilde{\Lambda}$ donde $\Phi = \{X_i\}_{i \geq 1}$ es un p.p. de Poisson con medida de intensidad Λ . Entonces para toda función no negativa \tilde{f} definida en $\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^l \times \tilde{\mathbb{M}}$ se cumple que:

$$E \left[\int_{\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^l} \tilde{f}(x, m, \tilde{\Phi} - \delta(x, m)) d\tilde{\Phi}(x, m) \right] = \iint_{\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^l} E \left[\tilde{f}(x, m, \tilde{\Phi}) \right] dF_x(m) d\Lambda(x).$$

■

1.3.2. Procesos marcados estacionarios y la distribución de Palm de las marcas

Cuando definimos lo qué era que un p.p. sea independientemente marcado, hablabamos de una distribución F_X de las marcas. La existencia de la misma puede probarse usando el teorema de Radon-Nikodym y tiene por lo tanto una interpretación como una probabilidad de Palm:

Sean $\tilde{\Phi} = \{(X_i, m_i)\}_{i \geq 1}$ un p.p. independientemente marcado con intensidad $\tilde{\Lambda}$ y $\Phi = \{X_i\}_{i \geq 1}$ con medida de intensidad Λ . Entonces:

$$\tilde{\Lambda}(A \times K) = E[\tilde{\Phi}(A \times K)] \leq E[\tilde{\Phi}(A \times \mathbb{R}^l)] = E[\Phi(A)] = \Lambda(A).$$

Podemos concluir entonces que $\tilde{\Lambda}(\cdot \times K)$ es absolutamente continua con respecto a $\Lambda(\cdot)$ y se puede definir entonces $F_x(K)$ como la única medida (Λ - c.t.p.) tal que:

$$\tilde{\Lambda}(A \times K) = \int_A F_x(K) d\Lambda(x). \quad (1.19)$$

F_X definida de esta manera es en efecto la distribución de las marcas pues como $\tilde{\Phi}$ es independientemente marcado, asumimos que la distribución de las marcas no depende más que del punto al cual están asociadas.

Vamos a ver ahora que si definimos qué es que un p.p. marcado sea estacionario, existe otra interpretación de una distribución de Palm de las marcas que en el caso independientemente marcado coincide con la anterior:

Definición 1.3.3. Un p.p. marcado $\tilde{\Phi} = \sum_{i \geq 1} \delta_{(X_i, m_i)}$ en $\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^l$ es *estacionario* si la distribución de $\tilde{\Phi}$ es la misma que la de $\tilde{\Phi} + x = \sum_{i \geq 1} \delta_{(X_i+x, m_i)}$ para todo $x \in \mathbb{R}^d$.

Observemos que si $\tilde{\Phi}$ es estacionario con medida de intensidad $\tilde{\Lambda}$, claramente ocurre que $\tilde{\Lambda}(\cdot \times K)$ es una medida en \mathbb{R}^d que es invariante por traslaciones. Usando el teorema (1.1.1) tenemos que existe una constante λ y una cantidad $\nu(K)$ tal que:

$$\tilde{\Lambda}(\cdot \times K) = \lambda m(\cdot) \nu(K).$$

A esta cantidad $\nu(K)$ se le llama la *distribución de Palm de las marcas* en el caso estacionario, pues es claro que tiene esa interpretación. Más aún, juntando el teorema (1.1.1) con la ecuación (1.19) es claro que si $\tilde{\Phi}$ es un p.p. independientemente marcado y estacionario, $\nu(K) = F_X(K)$.

Siguiendo así la filosofía de la teoría de Palm, cuando $\tilde{\Phi}$ es estacionario, como la distribución de Palm es una cantidad $\nu(K)$ que no depende de Φ , interpretamos que las probabilidades de Palm son las mismas sin importar a qué punto condicionamos. Hablaremos entonces de *la marca de un punto típico*.

Una notación habitual para la distribución de la marca típica es P_0 , aludiendo al hecho de que tomamos la probabilidad en el caso en que los puntos de Φ están dados y como el proceso es estacionario, estamos “viendo” el comportamiento del mismo desde un punto típico. Así mismo, se suele llamar E^0 al operador que integra con respecto a P_0 y se lo interpreta como tomar promedios considerando que los puntos en $\tilde{\Phi}$ están dados y solo varían las marcas.

Demostraremos ahora el último teorema de la sección de procesos marcados, el cual nos será muy útil en los capítulos siguientes y que relaciona la esperanza E con la esperanza bajo P_0 :

Proposición 1.3.3. *Si $f \geq 0$ y $\tilde{\Phi}$ es un p.p.i.m. estacionario con marcas en \mathbb{R}^l que proviene de Φ un proceso puntual en \mathbb{R}^d entonces se cumple que:*

$$\int f(\tilde{\varphi}) dP_{\tilde{\Phi}}(\tilde{\varphi}) = \int E^0 [f(\tilde{\varphi})] dP_{\Phi}(\varphi).$$

Demostración:

Si llamamos Φ_m al proceso puntual de las marcas en \mathbb{R}^l , podemos escribir $\tilde{\Phi} = \{\Phi, \Phi_m\}$ pensándolo a $\tilde{\Phi}$ como un proceso puntual en el espacio producto $\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^l$. Si P_{Φ} es la distribución de Φ y P_{Φ_m} es la distribución de Φ_m , tenemos la igualdad de medidas:

$$P_{\tilde{\Phi}} = P_{\Phi} \times P_{\Phi_m},$$

que se deduce fácilmente verificándola en el álgebra de los rectángulos del espacio producto (conjuntos de la forma $\Gamma \times \Gamma_m$). El teorema de extensión de medidas nos garantiza entonces que ambas medidas son la misma. Apliquemos el teorema de Fubini para obtener:

$$\int f(\tilde{\varphi}) dP_{\tilde{\Phi}}(\tilde{\varphi}) = \int \left(\int f(\tilde{\varphi}) dP_{\Phi_m}(\varphi_m) \right) dP_{\Phi}(\varphi).$$

Finalmente, recordando que P_{Φ_m} , es decir, la distribución de las marcas, coincide con la distribución de Palm de las marcas cuando Φ es estacionario concluimos que integrar respecto a dP_{Φ_m} no es otra cosa que considerar la esperanza E^0 (esto es: tomar promedios pensando que los puntos están fijos y solo las marcas varían). ■

1.4. Shot-Noise

Un shot-noise (o literalmente “ruido de disparo”) es un objeto matemático en el que podemos plasmar, dado un proceso puntual, la información sobre como interactúan los puntos entre sí o con el medio. Básicamente, el shot-noise engloba los valores de una variable que se mide en cada punto y depende a su vez de los puntos del ambiente. Por ejemplo, en el capítulo 3 usaremos los shot-noise para modelar la manera en que se interfieren entre sí varios nodos de una red inalámbrica dispuestos al azar en el plano que intentan transmitir.

Como bien dijimos, el shot-noise recoge la información de cierta variable. Vamos a distinguir dos maneras de hacer esto: un shot-noise aditivo se fija en el efecto acumulado de todo el espacio sobre un punto mientras que a un shot-noise extremal le interesa el efecto máximo que tiene el espacio sobre un punto. Definiremos precisamente ambos casos.

1.4.1. Shot-Noise Aditivo

Definición 1.4.1. Dado un p.p. marcado $\tilde{\Phi}$ en $\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^l$, se define $I_{\tilde{\Phi}}$ el *shot-noise aditivo* asociado a $\tilde{\Phi}$ como un funcional tal que a cada punto del espacio $y \in \mathbb{R}^d$ le corresponde un vector en $(\mathbb{R}^+)^k$.

Además, su *función de respuesta* L es una función no negativa tal que:

$$I_{\tilde{\Phi}}(y) = \int_{\mathbb{R}^d} \int_{\mathbb{R}^l} L(y, x, m) \, d\tilde{\Phi}(x, m) = \sum_{(X_i, m_i) \in \tilde{\Phi}} L(y, X_i, m_i).$$

Lamentablemente, algo tan primitivo como la distribución de un shot-noise aditivo es muy difícil de calcular en general. Presentaremos a continuación algunas propiedades que se pueden probar sobre $I_{\tilde{\Phi}}$ sin analizar casos particulares.

Proposición 1.4.1. *Sean $\tilde{\Phi}$ un p.p. marcado en $\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^l$ y $I_{\tilde{\Phi}}$ un shot-noise aditivo con función de respuesta L . Entonces para toda función f no negativa tenemos que:*

$$E[I_{\tilde{\Phi}}(y)] = \int_{\mathbb{R}^d} \int_{\mathbb{R}^l} L(y, x, m) \, dF_x(m) \, d\Lambda(x).$$

Demostración:

Se obtiene directamente de aplicar el teorema (1.3.1) ■

Esta fórmula nos dice en particular que si el término de la derecha es finito, $I_{\tilde{\Phi}}$ es finito con probabilidad 1 para todo y . Esto no alcanza para decir que $\{y : I_{\tilde{\Phi}} < +\infty \text{ c.s.}\}$ tiene probabilidad 1. Por eso demostraremos esta proposición:

Proposición 1.4.2. *Sean $\tilde{\Phi}$ un p.p. marcado en $\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^l$ y $I_{\tilde{\Phi}}$ un shot-noise aditivo con función de respuesta L . Entonces si para cada $y \in \mathbb{R}^d$ existe un $\varepsilon_y > 0$ tal que*

$$\int_{\mathbb{R}^d} \int_{\mathbb{R}^l} \sup_{z \in B(y, \varepsilon_y)} L(z, x, m) \, dF_x(m) \, d\Lambda(x) < +\infty,$$

entonces $\{y : I_{\tilde{\Phi}} < +\infty \text{ c.s.}\}$ tiene probabilidad 1. Además, si L es una función continua en y entonces $I_{\tilde{\Phi}}$ tiene trayectorias continuas.

Demostración:

Para probar la primera parte, consideremos el cubrimiento de \mathbb{R}^d dado por $\{B(y, \varepsilon_y) : y \in \mathbb{R}^d\}$. Como \mathbb{R}^d es separable podemos tomar un subcubrimiento finito $\{B(y, \varepsilon_y)\}_{n \geq 1}$. Definamos:

$$I'(y) := \int_{\mathbb{R}^d} \int_{\mathbb{R}^l} \sup_{z \in B(y, \varepsilon_y)} L(z, x, m) \, d\tilde{\Phi}(x, m).$$

La hipótesis dice que dado un y_n fijo, se sabe que $I'(y_n)$ tiene esperanza finita. Usando la definición de $I'(y)$, podemos afirmar que dado Ω el espacio de sucesos de $\tilde{\Phi}$, existe $\Omega_n \subset \Omega$ tal que $P(\Omega_n) = 1$ y para todo $\omega \in \Omega_n$ se cumple que $I'(y_n, \omega) < +\infty$.

Consideremos ahora $\Omega' = \bigcap_{n \geq 1} \Omega_n$. Concluimos entonces que para todo $\omega \in \Omega'$ se cumple que:

$$I_{\tilde{\Phi}}(z) \leq I'(y_n) < +\infty \quad \forall z \in \mathbb{R}^d,$$

donde n es tal que $z \in B(y_n, \varepsilon_n)$.

Para demostrar la segunda parte, es directo ver que si $z_n \rightarrow z$ entonces puedo tomar n suficientemente grande tal que $z_n \in B(y_n, \varepsilon_n)$ para aplicar convergencia dominada y concluir que:

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} I_{\tilde{\Phi}}(z_n) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \int_{\mathbb{R}^d} \int_{\mathbb{R}^l} L(z_n, x, m) d\tilde{\Phi}(x, m) = \int_{\mathbb{R}^d} \int_{\mathbb{R}^l} \lim_{n \rightarrow +\infty} L(z_n, x, m) d\tilde{\Phi}(x, m) = I_{\tilde{\Phi}}(z).$$

■

Si bien dijimos que no siempre podemos calcular teóricamente la distribución de un shot-noise aditivo, daremos ahora una condición suficiente para afirmar que esta distribución tiene una densidad:

Proposición 1.4.3. *Sean $\tilde{\Phi}$ un p.p. marcado en $\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^l$ e $I_{\tilde{\Phi}}$ un shot-noise aditivo con función de respuesta L . Entonces si $\Lambda(\mathbb{R}^d) = +\infty$ y para cada $A \subset (\mathbb{R}^+)^k$ que tiene medida de Lebesgue nula se cumple que:*

$$\iint_{\mathbb{R}^{d+l}} \mathbf{1}(L(y, x, m) \in A) dF_x(m) d\Lambda(x) = 0,$$

entonces $I_{\tilde{\Phi}}$ tiene una densidad con respecto a la medida de Lebesgue para todo $y \in \mathbb{R}^d$.

Demostración:

Fijemos $y \in \mathbb{R}^d$, $A \subset (\mathbb{R}^+)^k$ con $m(A) = 0$ y $r > 0$. Si definimos:

$$I_r = \int_{B(0,r)} \int_{\mathbb{R}^l} \mathbf{1}(L(y, x, m) \in A) d\tilde{\Phi}(x, m) \quad \text{e} \quad I_r^c = \int_{(B(0,r))^c} \int_{\mathbb{R}^l} \mathbf{1}(L(y, x, m) \in A) d\tilde{\Phi}(x, m),$$

(que son independientes porque $\tilde{\Phi}$ es de Poisson) y consideramos los sucesos $B_n = \{\tilde{\Phi}(B(0, r)) = n\}$ entonces se cumple que:

$$P(I_{\tilde{\Phi}}(y) \in A) = P(I_r + I_r^c \in A) = \sum_{n \geq 1} P(I_r + I_r^c \in A | B_n) P(B_n). \quad (1.20)$$

Calculemos ahora cada factor desconocido por separado (donde $n > 0$):

$$P(I_r + I_r^c \in A | B_n) = \int_{(\mathbb{R}^+)^k} P(I_r + z \in A | B_n) dF_{I_r^c}(z) = \int_{(\mathbb{R}^+)^k} E[\mathbf{1}(I_r \in A - z) | B_n] dF_{I_r^c}(z).$$

Notemos que I_r bajo B_n puede verse como $I_r = \sum_{i=1}^n L(y, X_i, m_i)$ que es la suma de n vectores aleatorios idénticamente distribuidos, donde cada vector (X, m) tiene distribución:

$$\frac{1}{\Lambda(B_n)} dF_x(m) d\Lambda(x).$$

Por lo tanto, usando la hipótesis y la notación $n^{-1}(A - z) = \{\frac{1}{n}(a - z) : a \in A\}$:

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[\mathbf{1}(I_r \in A - z)|B_n] &= \mathbb{E}[\mathbf{1}(L(y, X, m) \in n^{-1}(A - z))] = \\ &= \int_{\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^l} \mathbf{1}(L(y, x, m) \in n^{-1}(A - z)) \, dF_x(m) \, d\Lambda(x) = 0. \end{aligned}$$

Volviendo a la ecuación (1.20):

$$\mathbb{P}(I_{\tilde{\Phi}}(y) \in A) = \sum_{n \geq 1} \mathbb{P}(I_r + I_r^c \in A|B_n)\mathbb{P}(B_n) = \mathbb{P}(I_r + I_r^c \in A|B_0)\mathbb{P}(B_0) \leq \mathbb{P}(B_0) \rightarrow 0$$

cuando $r \rightarrow 0$ porque $\Lambda(\mathbb{R}^d) = +\infty$, concluyendo así la demostración. ■

Por último, presentaremos una herramienta que en ciertos contextos puede ser útil para recuperar la distribución del shot-noise aditivo: se trata del funcional de Laplace.

Definición 1.4.2. La transformada de Laplace multivariada de un shot-noise aditivo $I_{\tilde{\Phi}} = (I_1, \dots, I_k)$ es:

$$\mathcal{L}_{I_{\tilde{\Phi}}(y)}(t_1, \dots, t_k) = \mathbb{E} \left[e^{-\sum_{i=1}^k t_i I_i(y)} \right].$$

y la propiedad que nos importa es la siguiente:

Proposición 1.4.4. Si $\tilde{\Phi}$ es un p.p. de Poisson independientemente marcado con $\text{int } \Lambda$ y distribución de marcas $F_x(m)$ y además $I_{\tilde{\Phi}}$ es un shot-noise aditivo asociado a $\tilde{\Phi}$ con función de respuesta L , entonces:

$$\mathcal{L}_{I_{\tilde{\Phi}}(y)}(t_1, \dots, t_k) = \exp \left[- \int_{\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^l} \left(1 - e^{-\sum_{i=1}^k t_i I_i(y)} \right) dF_x(m) \, d\Lambda(x) \right].$$

Demostración:

Se demuestra fácilmente tomando $f(x, m) = \sum_{i=1}^k t_i L_i(y, x, m)$ pues entonces:

$$\mathcal{L}_{I_{\tilde{\Phi}}(y)}(t_1, \dots, t_k) = \mathbb{E} \left[\exp \left(- \sum_{i=1}^k t_i \int_{\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^l} L_i(y, x, m) \, d\tilde{\Phi}(x, m) \right) \right] = \mathbb{E} \left[e^{-\iint_{\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^l} f(x, m) \, d\tilde{\Phi}(x, m)} \right] = \mathcal{L}_{\tilde{\Phi}}(f).$$

Luego, es simplemente aplicar la proposición (1.3.1) que nos da el funcional de Laplace para un p.p. de Poisson, para hallar la forma de $\mathcal{L}_{\tilde{\Phi}}$. ■

1.4.2. Shot-Noise Extremal

Para finalizar este capítulo, definiremos el shot-noise extremal:

Definición 1.4.3. Un *shot-noise extremal* $X_{\tilde{\Phi}}$ con función de respuesta L asociado a $\tilde{\Phi}$ un p.p. marcado en $\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^l$ es una función que asigna a cada $y \in \mathbb{R}^d$ un vector aleatorio en $(\mathbb{R}^+)^k$ que cumple:

$$X_{\tilde{\Phi}}(y) = \sup_{(X_i, m_i) \in \tilde{\Phi}} L(y, X_i, m_i).$$

A diferencia del shot-noise aditivo, en el caso extremal es posible calcular la distribución:

Teorema 1.4.1. Sean $\tilde{\Phi}$ un p.p.i.m. de Poisson en $\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^l$ y $X_{\tilde{\Phi}}$ un shot-noise extremal con función de respuesta L que toma valores en \mathbb{R}^+ . Entonces las distribuciones finito-dimensionales de $X_{\tilde{\Phi}}$ vienen dadas por:

$$P(X(y_1) \leq t_1, \dots, X(y_k) \leq t_k) = \exp \left[\int_{\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^l} \left(1 - \prod_{j=1}^k \mathbf{1}(L(y_j, x, m) \leq t_j) \right) dF_x(m) d\Lambda(x) \right],$$

y en particular:

$$P(X(y) \leq t) = \exp \left[\int_{\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^l} \mathbf{1}(L(y, x, m) > t) dF_x(m) d\Lambda(x) \right].$$

Demostración:

$$\begin{aligned} P(X(y_1) \leq t_1, \dots, X(y_k) \leq t_k) &= E[\mathbf{1}(L(y_j, X_i, m_i) \leq t_j \forall j = 1, \dots, k, (X_i, m_i) \in \tilde{\Phi})] = \\ &= E \left[\prod_{(X_i, m_i) \in \tilde{\Phi}} \mathbf{1}(L(y_j, X_i, m_i) \leq t_j \forall j = 1, \dots, k) \right] = \\ &= E \left\{ \exp \left[\sum_{(X_i, m_i) \in \tilde{\Phi}} \log \left(\prod_{j=1}^k \mathbf{1}(L(y_j, X_i, m_i) \leq t_j) \right) \right] \right\} = \mathcal{L}_{\tilde{\Phi}}(f), \end{aligned}$$

donde $f(x, m) = -\log \left(\prod_{j=1}^k \mathbf{1}(L(y_j, x, m) \leq t_j) \right)$. Simplemente resta usar la proposición (1.3.1) que nos da la forma de $\mathcal{L}_{\tilde{\Phi}}(f)$. ■

Capítulo 2

Modelos de Matérn Hard-Core

Este capítulo se basa en el artículo [6] publicado por Dietrich y Helga Stoyan. En el mismo estudiaremos un tipo particular de procesos puntuales que no son de Poisson, pero poseen ciertas propiedades conocidas. Históricamente, se los ha usado para modelar fenómenos muy diversos como ser la disposición de árboles en un bosque, la presencia de yacimientos de minerales, la ocurrencia de erupciones volcánicas a lo largo del tiempo y la propagación de incendios forestales entre muchos otros fenómenos en diversas áreas de la Ciencia. En particular nos motiva su aplicación al modelado de conjuntos de nodos o dispositivos intentando conectarse a un medio inalámbrico.

Nuestro interés en estos modelos radica en primer lugar en su sencillez: son fáciles de definir y simular y se pueden obtener fórmulas analíticas para sus principales características. En segundo lugar, los modelos presentados en el capítulo siguiente son una generalización de los modelos de esta sección.

2.1. Proceso de Matérn Hard-Core Clásico

Un proceso puntual de Matérn Hard-Core es un refinamiento no independiente de un p.p. de Poisson donde dos puntos nunca están a menos de una distancia $r > 0$ fija. Su construcción matemática es la siguiente:

2.1.1. Definición

Sea $\Phi = \{X_i\}_{i \in \mathbb{N}}$ un proceso puntual de Poisson en \mathbb{R}^d de intensidad λ y sea $r > 0$ dado. Consideremos $\tilde{\Phi} = \{(X_i, m_i)\}_{i \in \mathbb{N}}$ el proceso puntual marcado con marcas $\{m_i\}_{i \in \mathbb{N}}$ que son variables positivas iid (independientes entre si, y a su vez, de las X_i) con distribución $H(t) = P(m < t)$. Generalmente se dice que la marca m_i es la “edad” del punto x_i . Para fijar ideas podemos pensar que distribuyen como $U[0, 1]$, aunque más adelante veremos que la elección de H es indiferente a los efectos del primer y segundo momento.

Observemos también que de la independencia de las $\{m_i\}_{i \in \mathbb{N}}$, usando la proposición (1.3.1) tenemos que $\tilde{\Phi}$ es un p.p. de Poisson en $\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}$.

Definimos los siguientes indicadores:

$$e_i = \mathbf{1}(m_i < m_j \quad \forall j \in \mathbb{N} : X_j \in B^*(X_i, r)). \quad (2.1)$$

Es decir, e_i es el indicador de que el punto X_i es el más “joven” de entre los X_j a distancia r de X_i . Con todo esto ya tenemos lo necesario para hacer la definición que nos interesa:

Definición 2.1.1. En el contexto anterior y usando las mismas notaciones, el proceso Φ_{MHC} llamado de Matérn Hard-Core engendrado por Φ es:

$$\Phi_{MHC} = \sum_{i \in \mathbb{N}} e_i \cdot \delta_{X_i} .$$

Observemos que dos puntos de Φ_{MHC} no pueden estar a distancia r , pues eso implicaría que alguno de ellos se perdería en el refinamiento (el que tenga mayor “edad”). Sin embargo, la propiedad que justifica el nombre de este proceso es otra: las bolas de radio $r/2$ centradas en los puntos de Φ_{MHC} no se solapan (son sólidas, duras: de allí “hard-core”).

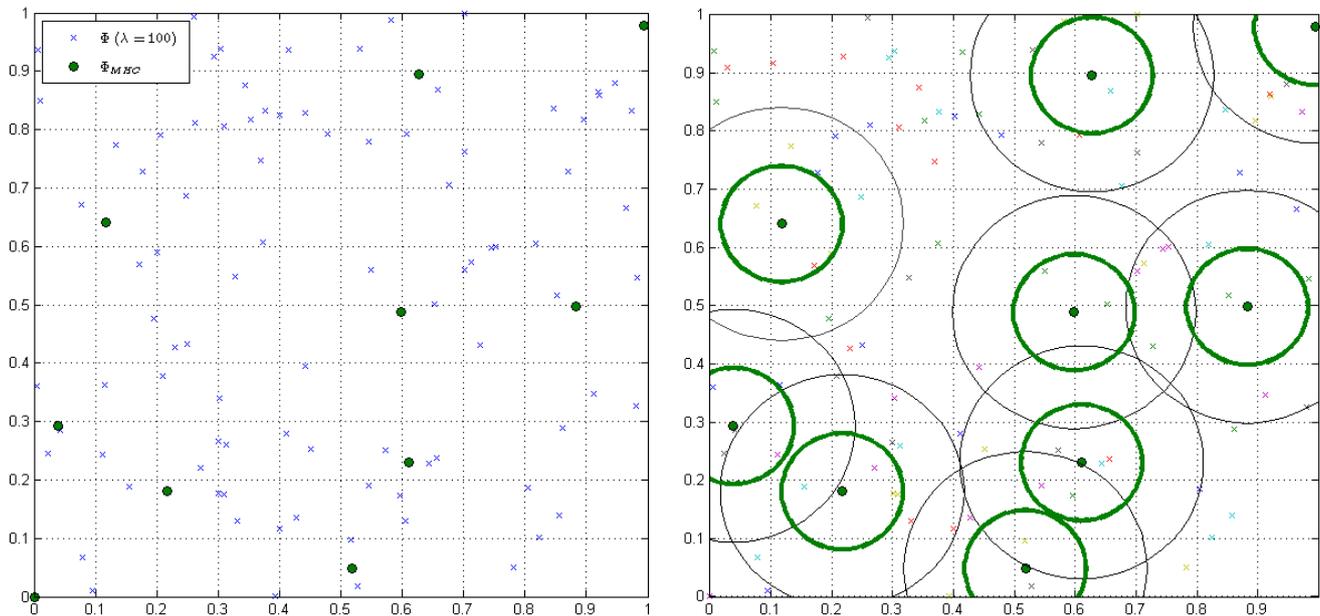


Figura 2.1: Simulación de Φ y Φ_{MHC} en $[0, 1]^2$ ($\lambda = 100$, $r = 0.2$, $m \sim U[0, 1]$)

En el cuadro de la derecha de la figura 3.2 vemos trazadas con un línea fina las bolas centradas en $x \in \Phi_{MHC}$ y de radio r . Con trazo grueso están representadas las de radio $r/2$. Aquí podemos apreciar claramente cómo las primeras se intersectan mientras que las segundas no.

La explicación de este fenómeno es simple: que se solapen $B(x, h)$ y $B(y, h)$ implica que $\|x - y\| < 2h$. Es claro que si $h = r/2$ esto no puede ocurrir, pero nada impide que sí suceda para $h = r$.

Esta propiedad de mínima distancia entre dos puntos implica claramente que Φ_{MHC} no es un proceso de Poisson. En la figura siguiente se ilustra esta observación: Con un λ suficientemente

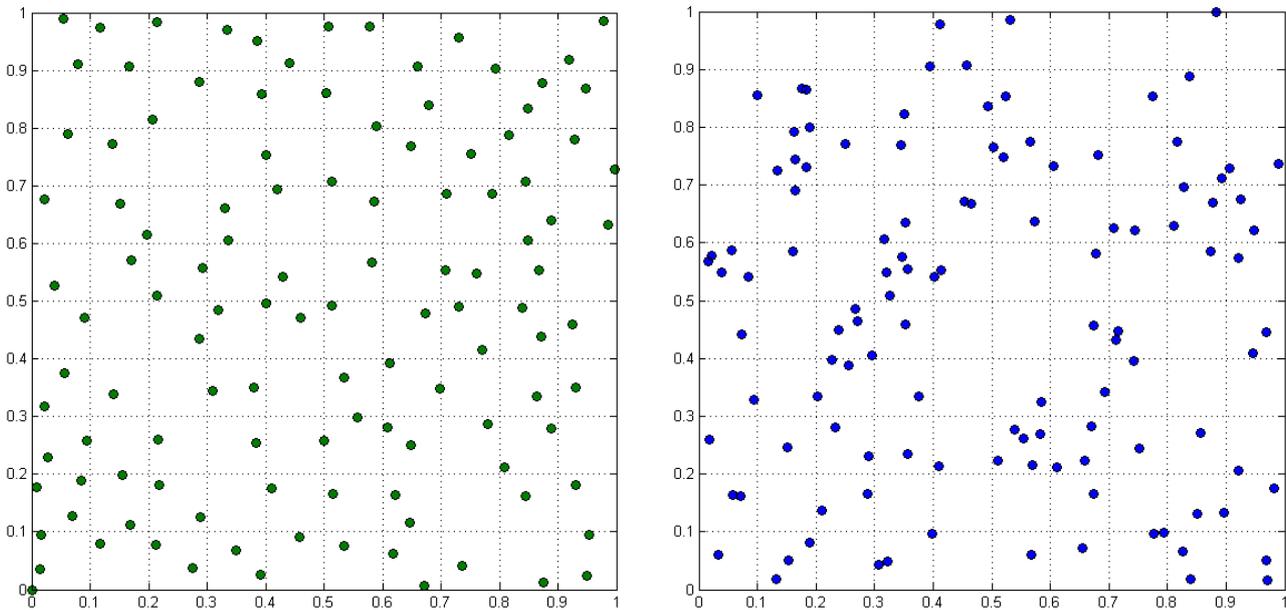


Figura 2.2: Simulación de Φ_{MHC} (en el cuadro de la izquierda) y un p.p. de Poisson (en el cuadro de la derecha), ambos en $[0, 1]^2$ y con la misma cantidad de puntos ($\lambda = 300$, $r = 0.05$, $m \sim U[0, 1]$).

grande, y un r no demasiado restrictivo es visible que la distribución de los puntos de Φ_{MHC} no parece ser completamente aleatoria en esta región del plano.

Queremos dedicarnos ahora a calcular la intensidad y la medida de segundos momentos del proceso Φ_{MHC} . De acuerdo a la última observación, no podemos usar para ello las mismas herramientas teóricas que para un p.p. de Poisson. No obstante como las $\{m_i\}_{i \in \mathbb{N}}$ son iid y por ser Φ estacionario se deduce que Φ_{MHC} también lo es. Su intensidad es entonces una constante λ_{MHC} que hallaremos a continuación.

2.1.2. Intensidad del p.p. de Matérn Hard-Core

Teorema 2.1.1. *Si Φ_{MHC} es el proceso puntual de Matérn Hard-Core construido a partir de Φ con radio $r > 0$ entonces la intensidad de Φ_{MHC} es:*

$$\lambda_{MHC} = \frac{1 - e^{-\lambda \nu_d r^d}}{\nu_d r^d},$$

donde $\nu_d = m(B(0, 1))$.

Demostración:

Recordemos la definición que dimos en la ecuación (2.1) de los e_i . Para esta demostración, vamos a pensar estos indicadores como marcas formando así un nuevo proceso $\tilde{\Phi}_{MHC} = \{(X_i, (m_i, e_i))\}_{i \in \mathbb{N}}$. Observemos que $\tilde{\Phi}_{MHC}$ no es un p.p. independientemente marcado pero si estacionario. Por esto

último, la intensidad se puede expresar como una constante que llamaremos $\tilde{\lambda}_{\text{MHC}}$. Además, si $B \subset \mathbb{R}^d$ tiene medida de Lebesgue 1, se cumple que:

$$\lambda_{\text{MHC}} = \mathbb{E} [\Phi_{\text{MHC}}(B)] = \mathbb{E} \left[\tilde{\Phi}_{\text{MHC}}(B \times (\mathbb{R} \times \{1\})) \right] = \tilde{\lambda}_{\text{MHC}}.$$

En consecuencia sólo necesitamos calcular esta última constante. Comencemos escribiendo:

$$\tilde{\lambda}_{\text{MHC}} = \mathbb{E} \left[\int_{\mathbb{R}^d} \int_{\mathbb{R}^2} \mathbf{1}_B(x) \mathbf{1}_{\mathbb{R} \times \{1\}}(m, e) d\tilde{\Phi}_{\text{MHC}}(x, (m, e)) \right].$$

Es claro que $\mathbf{1}_{\mathbb{R} \times \{1\}}(m, e) = \mathbf{1}_{\{e=1\}} = \mathbf{1}_A(x, m, \tilde{\Phi} \setminus \{(x, m)\})$ donde

$$A = \{(x, m, \tilde{\Phi}) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^+ \times \tilde{\mathbb{M}} : m < m_j \ \forall j \in \mathbb{N} / X_j \in \Phi \cap B(x, r)\},$$

por lo que:

$$\tilde{\lambda}_{\text{MHC}} = \mathbb{E} \left[\int_B \int_{\mathbb{R}^+} \mathbf{1}_A(x, m, \tilde{\Phi} \setminus \{(x, m)\}) \int_{\mathbb{R}} d\tilde{\Phi}_{\text{MHC}}(x, (m, e)) \right] = \quad (2.2)$$

$$= \mathbb{E} \left[\int_B \int_{\mathbb{R}^+} \mathbf{1}_A(x, m, \tilde{\Phi} \setminus \{(x, m)\}) d\tilde{\Phi}(x, m) \right]. \quad (2.3)$$

Podemos usar ahora la fórmula de Campbell-Matthes para p.p.i.m. (1.3.1) donde la función f es:

$$f(x, m, \tilde{\Phi}) = \mathbf{1}_B(x) \mathbf{1}_A(x, m, \tilde{\Phi}),$$

y así obtener:

$$\tilde{\lambda}_{\text{MHC}} = \lambda \int_B \int_{\mathbb{R}^+} \int_{\tilde{\mathbb{M}}} \mathbf{1}_A(x, m, \tilde{\varphi}) dP_{\tilde{\Phi}}(\tilde{\varphi}) dH(m) dx = \lambda \int_B \int_{\mathbb{R}^+} P(A) dH(m) dx \quad (2.4)$$

donde estamos usando que:

- ▷ como observamos antes, $\tilde{\Phi}$ es un p.p. de Poisson entonces por el teorema de Slivnyak (1.2.2) se cumple que $P_{(x,m)}^! = P_{\tilde{\Phi}}$,
- ▷ $F_x(m) = H(m)$ es la distribución de las marcas (que es independiente del punto x al cual está asociado la marca m),
- ▷ $d\Lambda(x) = \lambda dx$ por ser Φ un p.p. de Poisson con intensidad λ .

Ahora veremos quién es el término $P(A)$ que aparece en la ecuación (2.4):

$$P(A) = P(m < m_j \quad \forall j \in \mathbb{N} : X_j \in \Phi \cap B(x, r)) = P(\widehat{\Phi}(B(x, r)) = 0),$$

para el proceso $\widehat{\Phi}$ definido como:

$$\widehat{\Phi} = \sum_{(X_j, m_j) \in \tilde{\Phi}} \mathbf{1}(m_j \leq m) \cdot \delta_{X_j},$$

es decir: el proceso de los puntos con marcas menores a m . Notemos que este p.p. se obtiene como un refinamiento de Φ donde las variables de retención son $\{e'_j\}_{j \in \mathbb{N}}$ con $e'_j = \mathbf{1}(m_j \leq m)$. Así definidas, estas e'_j son independientes entre sí y en virtud de la proposición (1.1.5), tenemos que $\widehat{\Phi}$ es un p.p. de Poisson con intensidad:

$$\widehat{\Lambda}(B) = \int_B P(\mathbf{1}(m_j \leq m) = 1) \, d\Lambda(x) = \lambda \int_B H(m) \, dx = \lambda H(m) m_{\mathbb{R}^d}(B),$$

donde $m_{\mathbb{R}^d}$ es la medida de Lebesgue en \mathbb{R}^d . Concluimos entonces que:

$$P(A) = e^{-\widehat{\Lambda}(B(x, r))} = e^{-\lambda H(m) \nu_d r^d} \quad \text{con la notación } \nu_d = m_{\mathbb{R}^d}(B(0, 1)).$$

Ahora usemos esto en la ecuación (2.4) para obtener que:

$$\tilde{\lambda}_{\text{MHC}} = \lambda \int_B \int_{\mathbb{R}^+} e^{-\lambda H(m) \nu_d r^d} \, dH(m) \, dx = \lambda m_{\mathbb{R}^d}(B) \frac{1 - e^{-\lambda \nu_d r^d}}{\lambda \nu_d r^d}.$$

Y finalmente, como $m(B) = 1$ tenemos que:

$$\tilde{\lambda}_{\text{MHC}} = \frac{1 - e^{-\lambda \nu_d r^d}}{\nu_d r^d}.$$

■

Observación 2.1.1. Notemos que el valor que obtuvimos para la intensidad no depende de la distribución H de las marcas.

2.1.3. Cálculo de la medida de segundos momentos

Como ya vimos en la sección (1.1.1), conocer λ_{MHC} nos permitirá describir el número medio de puntos del proceso Φ_{MHC} en una región $W \subset \mathbb{R}^d$. Ahora, intentaremos hallar la varianza de esa variable, que sabemos por la misma sección que se obtiene hallando μ^2 la medida de segundos momentos para Φ_{MHC} . Pero también sabemos por las ecuaciones en la proposición (1.1.1) que alcanza con encontrar la medida factorial de segundos momentos para describir a μ^2 una vez que se conoce la intensidad. En definitiva, todo lo necesario para calcular los segundos momentos se encuentra en el siguiente teorema:

Teorema 2.1.2. *Si Φ_{MHC} es el proceso puntual de Matérn Hard-Core construido a partir de Φ con radio $r > 0$ entonces la densidad de la medida factorial de segundos momentos para Φ_{MHC} es:*

$$\rho^2(x, y) = \begin{cases} 2\lambda^2 \frac{1}{a+b} \left[\frac{1}{be^{a+b}} + \frac{1}{a} \right] - \frac{1}{abe^a} & \text{si } \|x - y\| \geq r, \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

donde

$$a = \lambda \nu_d r^d \quad y \quad b = \lambda m(B(x, r) \setminus B(y, r)).$$

Demostración:

Sean $A, B \subset \mathbb{R}^d$. Usando la nomenclatura de la sección (1.1.1) tenemos que la medida factorial de segundos momentos para Φ_{MHC} es (recordando la definición (1.1.5)):

$$\alpha^2(A \times B) = \mathbb{E} \left[\sum_{\substack{X, Y \in \Phi_{MHC} \\ X \neq Y}} \mathbf{1}_A(X) \mathbf{1}_B(Y) \right].$$

Al sumar en las parejas $X, Y \in \Phi_{MHC}$ estamos contemplando los puntos $X, Y \in \Phi$ tales que ambos fueron retenidos. Si la marca de X en Φ es k y la de Y es l esto se traduce en pedir que en $B(X, r)$ no haya puntos de $\tilde{\Phi}$ con marcas menores a k , que en $B(Y, r)$ no haya puntos de $\tilde{\Phi}$ con marcas menores a l y también que $\|X - Y\| > r$ (si no, alguno de los dos puntos eliminaría al otro). Entonces si definimos los conjuntos:

$$C = \{(x, y) \in \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d : \|x - y\| > r\},$$

$$D = \{(x, k, y, l, \tilde{\varphi}) \in \mathbb{R}^d \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^d \times \mathbb{R} \times \tilde{\mathbb{M}} : \tilde{\varphi}(B(x, r) \times (0, k)) = 0 = \tilde{\varphi}(B(y, r) \times (0, l))\},$$

tenemos que

$$\begin{aligned} \alpha^2(A \times B) &= \mathbb{E} \left[\sum_{\substack{(X, k), (Y, l) \in \tilde{\Phi} \\ X \neq Y}} \mathbf{1}_{C \cap A \times B}(X, Y) \mathbf{1}_D(X, k, Y, l, \tilde{\Phi}) \right] = \\ &= \int \left(\sum_{\substack{(x, k), (y, l) \in \tilde{\varphi} \\ x \neq y}} \mathbf{1}_{C \cap A \times B}(x, y) \mathbf{1}_D(x, k, y, l, \tilde{\varphi}) \right) dP_{\tilde{\Phi}}(\tilde{\varphi}) = \\ &= \int \left(\iint \mathbf{1}_{\{x \neq y\}}(x, y) \mathbf{1}_{C \cap A \times B}(x, y) \mathbf{1}_D(x, k, y, l, \tilde{\varphi}) d\tilde{\Phi}(x, k) d\tilde{\Phi}(y, l) \right) dP_{\tilde{\Phi}}(\tilde{\varphi}), \end{aligned} \quad (2.5)$$

donde no escribimos los límites de integración (que son los evidentes) para aclarar la escritura. Podemos alivianar aún más la notación notando que en el caso que $\|x - y\| < r$, es claro $\mathbf{1}_{C \cap A \times B}(x, y) = 0$ y entonces $\alpha^2(A \times B) = 0$. Por lo tanto, supondremos a partir de ahora que $\|x - y\| \geq r$ y así $\mathbf{1}_{C \cap A \times B}(x, y) = \mathbf{1}_{A \times B}(x, y)$.

Sigamos adelante definiendo para cada realización $\tilde{\varphi}$ de $\tilde{\Phi}$ la función:

$$f(\tilde{\varphi}) := \iint \mathbf{1}_{\{x \neq y\}}(x, y) \mathbf{1}_{A \times B}(x, y) \mathbf{1}_D(x, k, y, l, \tilde{\varphi}) d\tilde{\Phi}(x, k) d\tilde{\Phi}(y, l).$$

Escribamos $\tilde{\Phi} = \{\Phi, \Phi_m\}$ que corresponde a pensar a $\tilde{\Phi}$ como un p.p. en el espacio $\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}$ (Φ es el p.p. de los puntos X_i y Φ_m son las marcas vistas como p.p. en \mathbb{R}). Entonces podemos introducir a $f(\tilde{\varphi})$ en (2.5) y usar la proposición (1.3.3) para escribir:

$$\alpha^2(A \times B) = \int f(\tilde{\varphi}) dP_{\tilde{\Phi}}(\tilde{\varphi}) = \int E^0[f(\varphi, \Phi_m)] dP_{\Phi}(\varphi),$$

que corresponde a separar la esperanza de todo el proceso marcado en primero tomar promedios dejando los puntos fijos y variando las marcas, y después promediar el resultado pensando que ahora los puntos son aleatorios.

Antes de calcular la esperanza $E^0[\cdot]$, simplifiquemos la escritura de f . Podemos hacer esto si observamos que por ser $\tilde{\Phi}$ independientemente marcado se cumple que $d\tilde{\Phi}(x, k) = d\Phi(x)dH(k)$ (recordemos que H es la distribución de las marcas). En definitiva:

$$\begin{aligned} f(\tilde{\varphi}) &= \iiint \mathbf{1}_{\{x \neq y\}}(x, y) \mathbf{1}_{A \times B}(x, y) \mathbf{1}_D(x, k, y, l, \tilde{\varphi}) d\Phi(x) dH(k) d\Phi(y) dH(l) = \\ &= \iint \mathbf{1}_{\{x \neq y\}}(x, y) \mathbf{1}_{A \times B}(x, y) \left(\iint \mathbf{1}_D(x, k, y, l, \tilde{\varphi}) dH(k) dH(l) \right) d\Phi(x) d\Phi(y) = \\ &= \sum_{\substack{x, y \in \varphi \cap A \times B \\ x \neq y}} \iint \mathbf{1}_D(x, k, y, l, \tilde{\varphi}) dH(k) dH(l). \end{aligned}$$

Por lo tanto:

$$\begin{aligned} \alpha^2(A \times B) &= \int E^0 \left[\sum_{\substack{x, y \in \varphi \cap A \times B \\ x \neq y}} \iint \mathbf{1}_D(x, k, y, l, (\varphi, \Phi_m)) dH(k) dH(l) \right] dP_{\Phi}(\varphi) = \\ &= \int \sum_{\substack{x, y \in \varphi \cap A \times B \\ x \neq y}} E^0 \left[\iint \mathbf{1}_D(x, k, y, l, (\varphi, \Phi_m)) dH(k) dH(l) \right] dP_{\Phi}(\varphi). \quad (2.6) \end{aligned}$$

Para seguir la demostración, hagamos los siguientes razonamientos:

- ▷ $dH(m) = d\Phi_m(m)$ (recordemos que Φ_m representa a las marcas m vistas como proceso puntual en \mathbb{R}).
- ▷ Por la propia definición del conjunto D , se tiene que

$$\mathbf{1}_D(x, k, y, l, \tilde{\varphi} - \delta_{(x, k)}) = \mathbf{1}_D(x, k, y, l, \tilde{\varphi}) = \mathbf{1}_D(x, k, y, l, \tilde{\varphi} - \delta_{(y, l)}).$$

- ▷ Es claro que se cumple que $\tilde{\varphi} - \delta_{(y, l)} = (\varphi - \delta_x, \varphi_m - \delta_l)$.

▷ Podemos pensar el término dentro de $E^0[\cdot]$ en (2.6) como:

$$\int \hat{f}_{x,y,\varphi}(l, \Phi_m - \delta_l) d\Phi_m(l),$$

donde se define:

$$\hat{f}_{x,y,\varphi}(l, \Phi_m - \delta_l) := \int \mathbb{1}_D(x, k, y, l, (\varphi, \Phi_m)) d\Phi_m(k).$$

Habiendo visto todo lo anterior e introduciendo a $\hat{f}_{x,y,\varphi}$ en (2.6), podemos aplicar la fórmula reducida de Campbell (teorema (1.3.1)) dos veces (una vez para $\hat{f}_{x,y,\varphi}$ y otra más haciendo un razonamiento análogo dado que a su vez $\hat{f}_{x,y,\varphi}$ es una integral) para llegar a que:

$$\alpha^2(A \times B) = \int \left(\sum_{\substack{x,y \in \varphi \cap A \times B \\ x \neq y}} \iint E^0[\mathbb{1}_D(x, k, y, l, (\varphi, \Phi_m))] dH(k) dH(l) \right) dP_\Phi(\varphi).$$

Sigamos el cálculo llamando:

$$\begin{aligned} h(x, k, y, l, \varphi) &:= E^0[\mathbb{1}_D(x, k, y, l, (\varphi, \Phi_m))] = P_0(\mathbb{1}_D(x, k, y, l, (\varphi, \Phi_m)) = 1) = \\ &= P_0(\tilde{\Phi}(B(x, r) \times (0, k)) = 0 = \tilde{\Phi}(B(y, r) \times (0, l))) = p_1 \cdot p_2 \cdot p_3 \end{aligned}$$

donde:

$$p_1 = P_0(\tilde{\Phi}(B(x, r) \setminus B(y, r) \times (0, k)) = 0),$$

$$p_2 = P_0(\tilde{\Phi}(B(x, r) \cap B(y, r) \times (0, \max\{k, l\})) = 0),$$

$$p_3 = P_0(\tilde{\Phi}(B(y, r) \setminus B(x, r) \times (0, l)) = 0).$$

Las cantidades p_i tienen todas una interpretación sencilla. Por ejemplo:

$$p_1 = P_0(\text{todos los puntos en } B(x, r) \setminus B(y, r) \text{ tengan marcas menores a } k).$$

Sea ahora $\bar{H} := 1 - H$ y supongamos que Z es un punto cualquiera de $\Phi \cap B(x, r) \setminus B(y, r)$. Como el proceso $\tilde{\Phi}$ es i.m. se tiene que p_1 es el producto de tantas veces como puntos haya en $B(x, r) \setminus B(y, r)$ del factor $P_0(\text{marca de } Z \geq k) = \bar{H}(k)$. Un razonamiento análogo para p_1 y p_2 nos permite decir que:

$$h(x, k, y, l, \varphi) = \bar{H}(k)^{\varphi(B(x,r) \setminus B(y,r)) - 1} \cdot \bar{H}(\max\{k, l\})^{\varphi(B(x,r) \cap B(y,r))} \cdot \bar{H}(l)^{\varphi(B(y,r) \setminus B(x,r)) - 1},$$

donde los -1 en los exponentes aparecen porque, por ejemplo, pedir que no haya puntos con marcas más grandes que k en $B(x, r) \setminus B(y, r)$ es equivalente a pedir que solo se retenga x de todos los puntos. Por lo tanto, se eliminan tantos puntos como hay en el conjunto menos uno: el centro de la bola, que es x .

Prosigamos introduciendo la notación $n_1 = \varphi(B(x, r) \setminus B(y, r)) - 1$, $n_2 = \varphi(B(x, r) \cap B(y, r))$ y $n_3 = \varphi(B(y, r) \setminus B(x, r)) - 1$. Lo que nos interesa calcular es :

$$\iint \mathbb{E}^0 [\mathbb{1}_Y(x, k, y, l, \tilde{\varphi})] \, dH(k) \, dH(l),$$

que con la notación introducida es igual a:

$$\begin{aligned} & \int_0^{+\infty} \int_0^{+\infty} h(x, k, y, l, \varphi) \, dH(k) \, dH(l) = I_1 + I_2 := \\ & = \int_0^{+\infty} \int_0^k \bar{H}^{n_1}(k) \bar{H}^{n_2}(k) \bar{H}^{n_3}(l) \, dH(l) \, dH(k) + \int_0^{+\infty} \int_k^{+\infty} \bar{H}^{n_1}(k) \bar{H}^{n_2}(l) \bar{H}^{n_3}(l) \, dH(l) \, dH(k). \end{aligned}$$

Las integrales I_1 e I_2 se pueden resolver fácilmente y se obtiene que:

$$I_1 + I_2 = \frac{1}{n_1 + n_2 + 1} + \frac{1}{n_2 + n_3 + 1} = \frac{1}{\varphi(B(x, r))} + \frac{1}{\varphi(B(y, r))} = \frac{1}{\varphi(B(x, r) \cup B(y, r))}.$$

Llamémosle a esta cantidad $g(x, y, \varphi)$.

En definitiva, ahora tenemos que:

$$\alpha^2(A \times B) = \int \sum_{\substack{x, y \in \varphi \cap A \times B \\ x \neq y}} g(x, y, \varphi) \, P_{\Phi}(d\varphi) = \mathbb{E} \left[\sum_{\substack{X, Y \in \Phi \cap A \times B \\ X \neq Y}} g(X, Y, \Phi) \right].$$

Como estamos intentando calcular la densidad de α^2 , queremos hallar una función \hat{g} que cumpla:

$$\mathbb{E} \left[\sum_{\substack{X, Y \in \Phi \cap A \times B \\ X \neq Y}} g(X, Y, \Phi) \right] = \mathbb{E} \left[\sum_{\substack{X, Y \in \Phi \cap A \times B \\ X \neq Y}} \hat{g}(X, Y, \Phi - \delta_Y - \delta_X) \right], \quad (2.7)$$

pues de esta forma podríamos escribir:

$$\begin{aligned} \mathbb{E} \left[\sum_{\substack{X, Y \in \Phi \cap A \times B \\ X \neq Y}} g(X, Y, \Phi) \right] &= \mathbb{E} \left[\int_B \left(\int_A \hat{g}(x, y, \Phi - \delta_y - \delta_x) \mathbb{1}_{\{x \neq y\}}(x, y) \, d\Phi(x) \right) d\Phi(y) \right] \\ &= \mathbb{E} \left[\int_B f(y, \Phi - \delta_y) d\Phi(y) \right], \end{aligned}$$

donde definimos $f(y, \Phi - \delta_y) := \int_A \widehat{g}(x, y, \Phi - \delta_y - \delta_x) \mathbf{1}_{\{x \neq y\}}(x, y) d\Phi(x)$. En este caso, podríamos usar la fórmula reducida de Campbell (teorema (1.2.1)) para obtener que:

$$\mathbb{E} \left[\int_B f(y, \Phi - \delta_y) d\Phi(y) \right] = \int_B \int_{\mathbb{M}} f(y, \varphi) dP_y^1(\varphi) d\Lambda(y),$$

donde por ser Φ un proceso de Poisson homogéneo con intensidad λ se tiene que $dP_y^1(\varphi) = dP_\Phi(\varphi)$ y $d\Lambda(y) = \lambda dy$. Podríamos así volver a aplicar la fórmula de Campbell para el caso

$$\int_{\mathbb{M}} f(y, \varphi) dP_\Phi(\varphi) = \mathbb{E} \left[\int_A \widehat{g}(x, y, \Phi - \delta_x) \mathbf{1}_{\{x \neq y\}}(x, y) d\Phi(x) \right],$$

y entonces, si existiera una tal \widehat{g} , llegaríamos a que:

$$\alpha^2 (A \times B) = \lambda^2 \int_{A \times B} \left(\int_{\mathbb{M}} \widehat{g}(x, y, \varphi) \mathbf{1}_{\{x \neq y\}}(x, y) dP_\Phi(\varphi) \right) dx dy. \quad (2.8)$$

Solo nos resta hallar la función \widehat{g} que satisfaga (2.7). Para esto, tengamos en cuenta que, si $x, y \in \Phi$, como estamos en el caso $\|x - y\| \geq r$:

- $\Phi(B(x, r)) = (\Phi - \delta_x)(B(x, r)) + 1 = (\Phi - \delta_x - \delta_y)(B(x, r)) + 1,$
- $\Phi(B(y, r)) = (\Phi - \delta_x)(B(y, r)) = (\Phi - \delta_x - \delta_y)(B(y, r)) + 1,$
- $\Phi(B(x, r) \cup B(y, r)) = (\Phi - \delta_x - \delta_y)(B(x, r) \cup B(y, r)) + 2.$

Por lo tanto, si definimos:

$$\widehat{g}(x, y, \Phi) = \frac{1}{\Phi(B(x, r)) + 1} + \frac{1}{\Phi(B(y, r)) + 1} - \frac{1}{\Phi(B(x, r) \cup B(y, r)) + 2},$$

es claro que cumple la ecuación (2.7).

Finalmente, de sustituir la función \widehat{g} hallada en (2.8) tenemos que la densidad $\rho^2(x, y)$ de α^2 es:

$$\rho^2(x, y) = \lambda^2 \int_{\mathbb{M}} \left(\frac{1}{\varphi(B(x, r)) + 1} + \frac{1}{\varphi(B(y, r)) + 1} - \frac{1}{\varphi(B(x, r) \cup B(y, r)) + 2} \right) dP_\Phi(\varphi). \quad (2.9)$$

Queda ahora el problema de resolver esta integral. Para eso separemos en suma de dos integrales y consideremos las particiones de \mathbb{M} en conjuntos disjuntos $\mathbb{M} = \bigsqcup_{n, m \in \mathbb{N}} A_{m, n}$ y $\mathbb{M} = \bigsqcup_{n, m \in \mathbb{N}} B_{m, n}$ con

$$A_{m, n} = \{\varphi \in \mathbb{M} : \varphi(B(x, r)) = m - 1, \varphi(B(y, r) \setminus B(x, r)) = n - 1\},$$

$$B_{m, n} = \{\varphi \in \mathbb{M} : \varphi(B(y, r)) = m - 1, \varphi(B(x, r) \setminus B(y, r)) = n - 1\}.$$

Llamemos $g_1(x, y, \varphi) = [(\varphi(B(x, r)) + 1)(\varphi(B(x, r) \cup B(y, r)) + 2)]^{-1}$ (análogamente se puede definir una g_2). Con esta notación, es claro que la integral en (2.9) se separa en la suma de dos factores donde el primero es:

$$\lambda^2 \int_{\mathbb{M}} g_1(x, y, \varphi) dP_{\Phi}(\varphi) = \lambda^2 \sum_{m, n \in \mathbb{N}_{A_{m,n}}} \int g_1(x, y, \varphi) dP_{\Phi}(\varphi) = \lambda^2 \sum_{m, n \geq 1} \frac{1}{m} \frac{1}{m+n} P(A_{m,n}),$$

que claramente es igual a la misma integral con g_2 por la simetría que presentan g_1 con g_2 y los conjuntos $A_{m,n}$ con los $B_{m,n}$. Esto nos dice que:

$$\rho^2(x, y) = 2\lambda^2 \int_{\mathbb{M}} g_1(x, y, \varphi) dP_{\Phi}(\varphi) = \lambda^2 \sum_{m, n \geq 1} \frac{1}{m} \frac{1}{m+n} P(A_{m,n}).$$

Como Φ es un p.p. de Poisson sabemos que:

$$P(A_{m,n}) = \frac{e^{-a} a^{m-1}}{(m-1)!} \cdot \frac{e^{-b} b^{n-1}}{(n-1)!}, \quad \text{siendo} \quad a = \lambda \nu_d r^d \quad \text{y} \quad b = \lambda m(B(x, r) \setminus B(y, r)).$$

Entonces la igualdad sigue de esta forma:

$$\rho^2(x, y) = 2\lambda^2 \sum_{m, n \geq 1} \frac{1}{m} \frac{1}{m+n} P(A_{m,n}) = \frac{2\lambda^2 e^{-(a+b)}}{a} \sum_{m, n \geq 1} \frac{1}{m+n} \cdot \frac{a^m}{m!} \cdot \frac{b^{n-1}}{(n-1)!}.$$

Trabajando solo con la suma obtenemos que:

$$\begin{aligned} \sum_{k \geq 2} \sum_{m+n=k} \frac{1}{k} \cdot \frac{a^m}{m!} \cdot \frac{b^{k-m-1}}{(k-m-1)!} &= \sum_{k \geq 2} \frac{1}{k!} \sum_{m=1}^{k-1} \frac{(k-1)!}{m!(k-m-1)!} \cdot a^m \cdot b^{k-m-1} = \\ &= \sum_{k \geq 2} \frac{1}{k!} [(a+b)^{k-1} - b^{k-1}] = \frac{1}{a+b} \sum_{k \geq 2} \frac{(a+b)^k}{k!} - \frac{1}{b} \sum_{k \geq 2} \frac{b^k}{k!}. \end{aligned}$$

Agregando las constantes que faltan, concluimos finalmente que:

$$\begin{aligned} \rho^2(x, y) &= \frac{2\lambda^2 e^{-(a+b)}}{a} \left[\frac{1}{a+b} (e^{a+b} - a - b - 1) - \frac{1}{b} (e^b - b - 1) \right] = \\ &= 2\lambda^2 \frac{1}{a+b} \left[\frac{1}{be^{a+b}} + \frac{1}{a} \right] - \frac{1}{abe^a}. \end{aligned}$$

Resumiendo:

$$\rho^2(x, y) = \begin{cases} 2\lambda^2 \frac{1}{a+b} \left[\frac{1}{be^{a+b}} + \frac{1}{a} \right] - \frac{1}{abe^a} & \text{si } \|x - y\| \geq r, \\ 0 & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

■

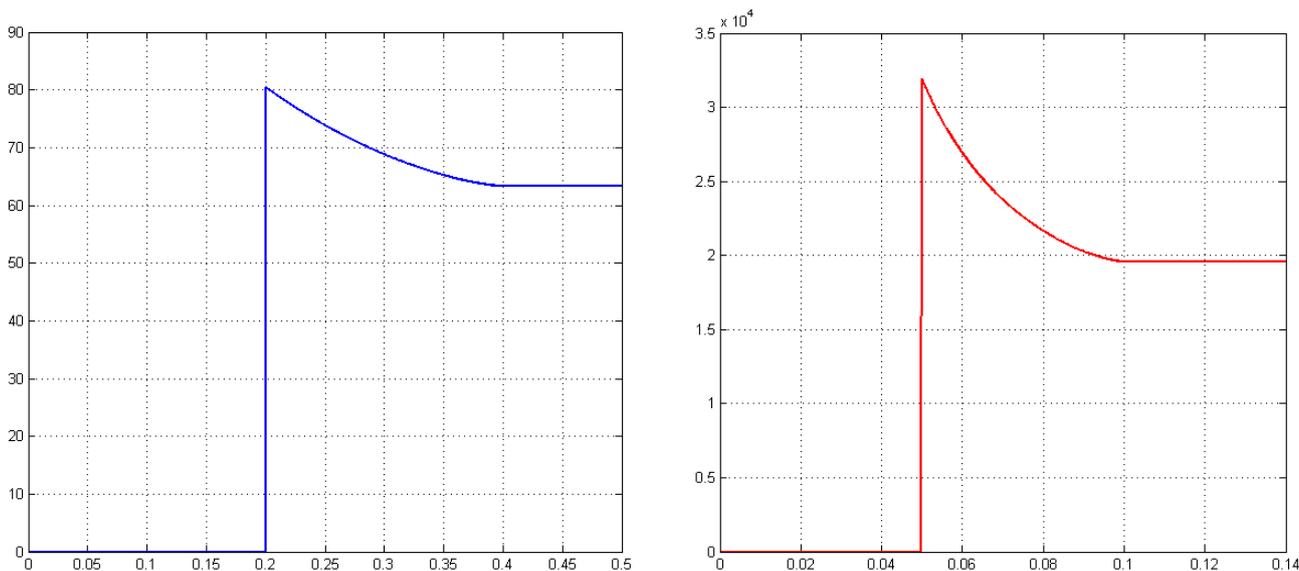


Figura 2.3: Gráfico de ρ^2 en función de $\|x - y\|$ ($x, y \in \mathbb{R}^2$) para $\lambda = 100$ en ambos casos y $r = 0.2$ en la gráfica de la izquierda y $r = 0.05$ en la gráfica de la derecha.

Observación 2.1.2. Notemos que las cantidades a y b dependen solamente de la distancia entre los puntos x e y , por lo cual ρ^2 puede verse como una función evaluada en $\|x - y\|$. En la figura (2.3) vemos dos gráficos de ρ^2 en casos particulares.

Observación 2.1.3. Al igual que con la intensidad, logramos probar que la medida de segundos momentos de un proceso de Matérn Hard-Core es independiente de la elección de la distribución H de las marcas.

2.2. Proceso de Matérn Hard-Core tipo II

Una primera generalización posible de este modelo es suponer que el radio r es aleatorio. Esto es: para cada punto X_i se sortea una marca m_i y un radio s_i aleatorios y el proceso de refinamiento es el mismo que antes: se sortea un radio para cada x y se eliminan los puntos que tengan marcas menores a las del propio x y que estén en la bola de centro x y radio el sorteado para x .

2.2.1. Definición

Podemos definir este nuevo proceso de forma muy similar al anterior. En definitiva:

- 1) $\Phi = \{X_i\}$ es un proceso de Poisson en \mathbb{R}^d homogéneo de intensidad λ .
- 2) $\tilde{\Phi} = \{(X_i, m_i, s_i)\}$ el proceso independientemente marcado con marcas iid donde la distribución de las m_i es H y la de las s_i es G . Nuevamente las m_i son las “edades” de los puntos pero ahora

los s_i jugaran el papel de los radios aleatorios. Para que otra vez $\tilde{\Phi}$ sea un p.p. de Poisson, vamos a pedir que las $\{X_i\}, \{m_i\}, \{s_i\}$ sean independientes 2 a 2.

- 3) $e_i = \mathbf{1}(m_i < m_j \quad \forall j \in \mathbb{N} : X_j \in B^*(X_i, s_i))$ son los indicadores que determinan que puntos son retenidos.

Con todo esto, podemos hacer la definición buscada:

Definición 2.2.1. En el contexto de esta sección, con los e_i definidos arriba y usando las mismas notaciones, el proceso Φ_{MHC2} llamado de *Matérn Hard-Core de tipo II* engendrado por Φ es:

$$\Phi_{MHC2} = \sum_{i \in \mathbb{N}} e_i \delta_{X_i}.$$

Una de las principales diferencias entre los procesos de tipo I y II es que en este último se pierde la “rigidez” de las bolas construidas. Es fácil verlo con un gráfico:

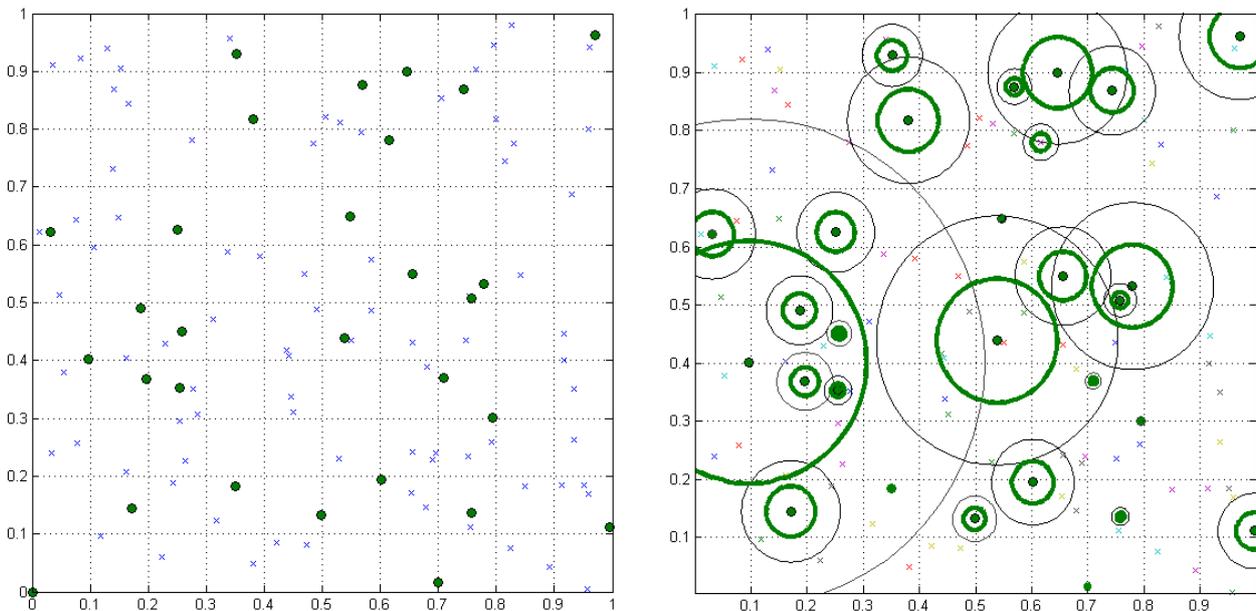


Figura 2.4: Simulación de Φ_{MHC2} ($\lambda = 100, r \sim \text{Exp}(0.2), m \sim U[0, 1]$).

La interpretación es la misma que en el caso anterior: las circunferencias de trazo fino tienen radio r_i y las de trazo grueso $r_i/2$. Claramente se ve que ahora es posible que cualquiera de ellas se interseque con otras bolas del mismo radio. Más aún: hasta puede quedar una incluida dentro de otra. La propiedad responsable de esto que se perdió al tomar radio aleatorio es la simetría de las condiciones $x \in B(y, r_y)$ e $y \in B(x, r_x)$. Al ser diferentes los radios es posible que se cumpla una y no la otra. Esto es: es posible que de x dependa la eliminación de y , pero que y no tenga ningún efecto sobre la eliminación de x .

Sin embargo, lo que sí es similar que el caso I es que no podemos afirmar que el proceso $\Phi_{\text{MHC2}} = \{(X_i, m_i, s_i)\}$ es de Poisson pero sí que es estacionario. Nos dedicaremos ahora a extender los razonamientos anteriores para poder hallar fórmulas para la intensidad λ_{MHC2} y la medida de segundos momentos.

2.2.2. Intensidad del p.p. de Matérn Hard-core de tipo II

Teorema 2.2.1. *Si Φ_{MHC2} es el proceso puntual de Matérn Hard-Core de tipo 2 construido a partir de Φ con radios aleatorios $\{s_i\}$ que tienen distribución G entonces la intensidad de Φ_{MHC} es:*

$$\lambda_{\text{MHC2}} = \int_0^{+\infty} \frac{1 - e^{-\lambda \nu_d r^d}}{\nu_d r^d} dG(r) = \int_0^{+\infty} \lambda_{\text{MHC}}(r) dG(r),$$

donde $\nu_d = m(B(0, 1))$.

Demostración:

Casi no tendremos que ajustar nada de la demostración del teorema (2.1.2) para llegar a lo que queremos.

Sean $\tilde{\Phi}_{\text{MHC2}} = \{(X_i, (m_i, s_i, e_i))\}$ y $B \subset \mathbb{R}^d$ con medida de Lebesgue 1. Usando las mismas justificaciones y notaciones, podemos escribir:

$$\begin{aligned} \lambda_{\text{MHC2}} &= \mathbb{E} \left[\tilde{\Phi} (B \times \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+ \times \{1\}) \right] = \mathbb{E} \left[\int_{\mathbb{R}^d} \int_{\mathbb{R}^3} \mathbf{1}_B(x) \mathbf{1}_{\mathbb{R}^2 \times \{1\}}(m, r, e) d\tilde{\Phi}_{\text{MHC}}(x, (m, r, e)) \right] = \\ &= \mathbb{E} \left[\int_B \int_0^{+\infty} \int_0^{+\infty} \mathbf{1}(m < m_j \forall X_j \in B^*(x, r) \cap \Phi) d\tilde{\Phi}(x, (m, r)) \right] = \\ &= \lambda \int_B \int_0^{+\infty} \int_0^{+\infty} \mathbb{P}(m < m_j \forall X_j \in B^*(x, r) \cap \Phi) dH(m) dG(r) dx = \\ &= \lambda \int_B \int_0^{+\infty} \int_0^{+\infty} \mathbb{P}(\hat{\Phi}(B^*(x, r)) = 0) dH(m) dG(r) dx = \\ &= \lambda \int_B \int_0^{+\infty} \int_0^{+\infty} e^{-\lambda \nu_d r^d} dH(m) dG(r) dx = \lambda m(B) \int_0^{+\infty} \frac{1 - e^{-\lambda \nu_d r^d}}{\lambda \nu_d r^d} dG(r). \end{aligned}$$

Concluimos entonces que:

$$\lambda_{\text{MHC2}} = \int_0^{+\infty} \frac{1 - e^{-\lambda \nu_d r^d}}{\nu_d r^d} dG(r) = \int_0^{+\infty} \lambda_{\text{MHC}}(r) dG(r).$$

■

Observación 2.2.1. Notemos que λ_{MHC2} se obtiene de una forma muy intuitiva: hallando la intensidad del proceso condicionado a cierto valor del radio r y luego integrando contra la distribución G .

2.2.3. Cálculo de la medida de segundos momentos

Teorema 2.2.2. *Si Φ_{MHC2} es el proceso puntual de Matérn Hard-Core de tipo II construido a partir de Φ con radios aleatorios $\{s_i\}$ que tienen distribución G entonces la densidad de la medida factorial de segundos momentos para Φ_{MHC2} es:*

$$\begin{aligned} \rho^2(x, y) = & \iint_{\{\|x-y\| > \max\{t, s\}\}} (A(x, s, y, t) + A(y, t, x, s)) dG(t) dG(s) + \\ & + \iint_{\{t \geq \|x-y\| > s\}} A(x, s, y, t) dG(t) dG(s) + \iint_{\{s \geq \|x-y\| > t\}} A(y, t, x, s) dG(t) dG(s), \end{aligned}$$

donde

$$\begin{aligned} a(r) &= \lambda \nu_d r^d, & b(x, s, y, t) &= \lambda m(B(x, s) \setminus B(y, t)) \text{ y} \\ A(x, s, y, t) &= \frac{1}{a(s) + b(y, t, x, s)} \left[\frac{1}{b(y, t, x, s) e^{a(s) + b(y, t, x, s)}} + \frac{1}{a(s)} \right] - \frac{1}{a(s) b(y, t, x, s) e^{a(s)}}. \end{aligned}$$

Demostración:

Nuevamente, la demostración será casi análoga a la hecha en la sección anterior. Sean $A, B \subset \mathbb{R}^d$, entonces la medida factorial de segundos momentos para Φ_{MHC2} es por definición:

$$\alpha^2(A \times B) = \mathbb{E} \left[\sum_{\substack{X, Y \in \Phi_{MHC} \\ X \neq Y}} \mathbb{1}_A(X) \mathbb{1}_B(Y) \right].$$

Observemos que si las marcas de X (viendo al radio aleatorio como una marca) es (k, s) y la marca de Y es (l, t) , entonces que X e Y sean retenidos se traduce en la ocurrencia de alguno de estos casos:

- cuando $X \notin B(Y, t)$ e $Y \notin B(X, s)$, solo necesito que no haya puntos en $B(X, s)$ con marcas menores a k y que en $B(Y, t)$ no haya puntos con marcas menores a t .
- Si $X \in B(Y, t)$ pero $Y \notin B(X, s)$, como X podría eliminar a Y , tengo que pedir además que k sea mayor a l
- Si $X \notin B(Y, t)$ pero $Y \in B(X, s)$, como Y podría eliminar a X , tengo que pedir (además de lo que pido en el primer caso) que l sea mayor a k .

Es claro que dejamos afuera el caso $X \in B(Y, t)$ e $Y \in B(X, s)$ pues de lo contrario es seguro que o X elimina a Y , o bien ocurre lo contrario.

En definitiva, si definimos los conjuntos:

$$C = \{(x, k, s, y, l, t, \tilde{\varphi}) : \tilde{\varphi}(B_{(x,s)} \times (0, k) \times \{s\}) = 0 = \tilde{\varphi}(B_{(y,t)} \times (0, l) \times \{t\})\},$$

$$D_1 = \{(x, s, y, t) : x \notin B(y, t), y \notin B(x, s)\},$$

$$D_2 = \{(x, k, s, y, l, t) : x \in B(y, t), y \notin B(x, s), k > l\},$$

$$D_2 = \{(x, k, s, y, l, t) : x \notin B(y, t), y \in B(x, s), k < l\},$$

$$\tilde{C} = C \cap \bigsqcup_{i=1}^3 D_i,$$

concluimos que X e Y son retenidos si y solamente si ocurre \tilde{C} . Es decir:

$$\alpha^2(A \times B) = \mathbb{E} \left[\sum_{(X,k,s),(Y,l,t) \in \tilde{\Phi}} \mathbb{1}_{A \cap B \cap \{X \neq Y\}}(X, Y) \mathbb{1}_{\tilde{C}}(X, k, s, Y, l, t, \tilde{\Phi}) \right].$$

Repetiendo el argumento basado en la proposición (1.3.3) de separar la integración respecto a $P_{\tilde{\Phi}}$ en integrar primero respecto a la Palm de las marcas (i.e: tomar $\mathbb{E}^0[\]$) y luego integrar respecto a P_{Φ} , obtenemos que $\alpha^2(A \times B)$ es igual a:

$$\int \left(\sum_{x,y \in \varphi} \neq \mathbb{1}_{A \times B}(x, y) \iiint \mathbb{E}^0 [\mathbb{1}_{\tilde{C}}(x, k, s, y, l, t, (\varphi, \Phi_m))] dH(k) dH(l) dG(s) dG(t) \right) dP_{\Phi}(\varphi). \quad (2.10)$$

donde ahora Φ_m es el p.p. de las marcas m_i y los radios aleatorios r_i visto como un p.p. en \mathbb{R}^2 y donde además estamos usando implícitamente que $d\tilde{\Phi}(x, k, s) = d\Phi(x) dH(k) dG(s)$. Hallemos la función f definida como la esperanza respecto a la Palm que aparece en (2.10) teniendo en cuenta que ahora estamos fijando las marcas (k, s) y (l, t) de x e y respectivamente y por lo tanto, en este contexto, los conjuntos D_i no son aleatorios:

$$f(x, k, s, y, l, t, \varphi) := \mathbb{E}^0 [\mathbb{1}_{\tilde{C}}(x, k, s, y, l, t, (\varphi, \Phi_m))] = \sum_{i=1}^3 \mathbb{E}^0 [\mathbb{1}_C \cdot \mathbb{1}_{D_i}] = \sum_{i=1}^3 \mathbb{E}^0 [\mathbb{1}_C] \mathbb{1}_{D_i}.$$

Es decir, nos queda una función partida cuyos valores son:

$$f(x, k, s, y, l, t, \varphi) = \begin{cases} \bar{H}(k)^{n_1} \cdot \bar{H}(\max\{k, l\})^{n_2} \cdot \bar{H}(l)^{n_3} & \text{si } (x, s, y, t) \in D_1, \\ \bar{H}(k)^{n_1+1} \cdot \bar{H}(\max\{k, l\})^{n_2-1} \cdot \bar{H}(l)^{n_3} & \text{si } (x, s, y, t) \in D_2, \\ \bar{H}(k)^{n_1} \cdot \bar{H}(\max\{k, l\})^{n_2-1} \cdot \bar{H}(l)^{n_3+1} & \text{si } (x, s, y, t) \in D_3, \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

donde usamos la notación del caso anterior:

$$\bar{H} = 1 - H, \quad n_1 = \varphi(B(x, s) \setminus B(y, t)) - 1,$$

$$n_2 = \varphi(B(x, s) \cap B(y, t)), \quad n_3 = \varphi(B(y, t) \setminus B(x, s)) - 1.$$

Aquí aparece una diferencia con el caso anterior: el cambio en los exponentes cuando estamos en el conjunto D_2 o en el D_3 . Cuando el radio es determinista, siempre ocurre D_1 . Pero con radio aleatorio, cuando ocurre D_2 , x pasa de estar en $B(x, s) \setminus B(y, t)$ a estar en $B(x, s) \cap B(y, t)$. Por lo tanto, pedir que se retenga x cuando ocurre D_2 es pedir que todos los puntos de $B(x, s) \setminus B(y, t)$ (sin excepción) y que todos los puntos de $B(x, s) \cap B(y, t)$ (menos el propio x) tengan marcas menores a k . Un argumento análogo sirve para justificar el cambio en los exponentes cuando sucede D_3 .

Del mismo modo que para el modelo anterior, seguimos ahora el cálculo integrando f respecto a $H(k)$ y $H(l)$ para obtener g . Observemos que las integrales que tenemos que calcular son:

$$I_2 = \int_0^{+\infty} \int_0^k \bar{H}^{n_1+n_2}(k) \bar{H}^{n_3}(l) \, dH(l) \, dH(k) \quad \text{para } D_2,$$

$$I_3 = \int_0^{+\infty} \int_k^{+\infty} \bar{H}^{n_1}(k) \bar{H}^{n_2+n_3}(l) \, dH(l) \, dH(k) \quad \text{para } D_3,$$

$$I_1 = I_2 + I_3 \quad \text{para } D_1$$

que ya conocemos de la parte anterior, por lo que luego de hallar g y aplicar Campbell para encontrar \hat{g} , tenemos que:

$$\alpha^2(A \times B) = \lambda^2 \iint_{A \times B} \mathbb{1}_{\{x \neq y\}} \left(\int_0^{+\infty} \int_0^{+\infty} \int_{\mathbb{M}} \hat{g}(x, s, y, t, \varphi) \, dP_{\Phi}(\varphi) \, dG(t) \, dG(s) \right) dy \, dx,$$

donde

$$\hat{g}(x, s, y, t, \varphi) = \begin{cases} \frac{1/(\Phi(B(x, s)) + 1) + 1/(\Phi(B(y, t)) + 1)}{\Phi(B(x, s) \cup B(y, t)) + 2} & \text{si } x \notin B(y, t), \, y \notin B(x, s), \\ \frac{1}{(\Phi(B(x, s)) + 1)(\Phi(B(x, s) \cup B(y, t)) + 2)} & \text{si } x \in B(y, t), \, y \notin B(x, s), \\ \frac{1}{(\Phi(B(y, t)) + 1)(\Phi(B(x, s) \cup B(y, t)) + 2)} & \text{si } x \notin B(y, t), \, y \in B(x, s), \\ 0 & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

Finalmente, para conocer la expresión de $\rho^2(x, y)$, notemos que el cálculo realizado para el caso anterior es exactamente el mismo, con la excepción de los dominios de integración y de la variabilidad del radio r anterior. Solo necesitamos introducir las notaciones:

$$a(r) = \lambda \nu_d r^d, \quad b(x, s, y, t) = \lambda m(B(x, s) \setminus B(y, t)),$$

$$A(x, s, y, t) = \frac{1}{a(s) + b(y, t, x, s)} \left[\frac{1}{b(y, t, x, s) e^{a(s)+b(y, t, x, s)}} + \frac{1}{a(s)} \right] - \frac{1}{a(s) b(y, t, x, s) e^{a(s)}},$$

y reescribir las condiciones que separan los valores de \hat{g} (para x, y fijos) para concluir que:

$$\rho^2(x, y) = \iint_{\{\|x-y\| > \max\{t, s\}\}} (A(x, s, y, t) + A(y, t, x, s)) \, dG(t) \, dG(s) +$$

$$+ \iint_{\{t \geq \|x-y\| > s\}} A(x, s, y, t) dG(t) dG(s) + \iint_{\{s \geq \|x-y\| > t\}} A(y, t, x, s) dG(t) dG(s).$$

■

Observación 2.2.2. Terminamos este capítulo observando que tanto para el p.p. de Matérn Hard-Core de tipo I como para el de tipo II, la intensidad y la medida de segundos momentos *no dependen de la distribución de las marcas m .*

Capítulo 3

Mecanismos de Acceso en Redes Inalámbricas

La primera sección de este capítulo está basada en el libro [2] de Baccelli mientras que la segunda sección lo está en el artículo [7] de Baccelli y Bermolen.

El desarrollo teórico hecho en el primer capítulo junto con los modelos del segundo nos servirán en el presente para modelar redes inalámbricas. Podemos pensar en una red inalámbrica como un conjunto de nodos x_i que quieren transmitir o recibir una señal. Al ser redes inalámbricas, el medio de transmisión (el aire) es compartido por todos, por lo que es posible que varios nodos se interfieran y la comunicación se trunque. Es por esto que surge la necesidad de un *protocolo*, i.e: un mecanismo de acceso que dado un nodo, nos diga cuando tiene permitido transmitir. Un protocolo será bueno si permite que transmitan la mayor cantidad de nodos posibles sin interferirse.

En este capítulo, haremos un modelo basado en la geometría aleatoria del protocolo conocido como CSMA por sus siglas en inglés (Carrier Sense Multiple Access). La idea básica de CSMA es que cada nodo sensa el canal y transmite si no hay interferencias en la comunicación. En caso contrario, espera un tiempo aleatorio antes de sensar nuevamente. Debido a su simplicidad, es uno de los mecanismos de acceso al medio más usado en la actualidad.

Más en detalle, cada nodo x_i posee cierto conjunto de nodos “vecinos”, que son los que compiten con x_i por el canal. Decimos que el canal está libre para x_i en un instante dado si no tiene nodos vecinos transmitiendo en ese momento. El protocolo permitirá que un nodo transmita solamente cuando el canal está libre.

Sin embargo, una estrategia en la cual los nodos transmiten instantáneamente una vez que detectaron que sus vecinos están inactivos es indeseable, pues podría llevar a que varios nodos se interfieran al terminarse la transmisión de un vecino común. Es por eso que se implementa un “*back-off timer*”: cada nodo sensa su canal y espera un tiempo aleatorio. Mientras el canal no esté libre, el timer (o contador) se para y comienza a correr ni bien se libera el medio. Cuando el timer de un nodo llega a 0, tiene permitido realizar la transmisión, y al finalizar esta, el timer se resetea.

Esto hace que CSMA tenga varias versiones (o alternativas) dependiendo de como definamos el vecindario de un nodo x_i . Nosotros estudiaremos dos versiones que se basan en ideas distintas. Por un lado, una alternativa es definir la vecindad de x_i como los puntos cuya influencia sobre x_i es mayor que determinado umbral, y entonces este criterio remite a la idea que vimos en el capítulo 1 de shot-noise extremal: nos interesa estudiar las interferencias individuales de cada nodo con x_i .

La segunda opción es estudiar el efecto acumulado de cada nodo sobre x_i : pediríamos así que la suma de las interferencias de cada nodo sobre x_i sea menor que determinado umbral. Esto nos lleva entonces a la noción de shot-noise aditivo, tal como vimos en la sección (1.4).

Consecuentemente, este capítulo se dividirá en 3 partes donde estudiaremos primero un criterio, luego el otro (ambos usando un umbral determinista y luego uno aleatorio) para terminar comparando ambos protocolos en un caso particular.

3.1. Modelo de Matérn con Shot-Noise Extremal

El primer criterio que propondremos permite ver al proceso de selección de nodos transmisores como algo similar a un proceso Matérn Hard-Core.

Se asume entonces:

1. $\Phi = \{X_i\}$ es el proceso puntual de los potenciales transmisores (nodos). Es de Poisson en \mathbb{R}^2 con intensidad λ .

Aquí suponemos que los nodos son aleatorios porque, a priori, no conocemos su posición exacta. Asumiremos solamente que se distribuyen uniformemente sobre la región de estudio.

2. $\{m_i\}$ son marcas iid positivas con distribución como $H(t)$ que representan los contadores que llamamos “back-off timers”, es decir, el tiempo que el nodo x_i esperará hasta intentar transmitir.
3. Para modelar la manera en que cada punto transmite, vamos a pensar que todos los nodos tienen la misma potencia de transmisión P_t que es constante. Sin embargo, vamos a incluir dos elementos que plasmen efectos que pueden hacer variar la transmisión:

El primero es el decaimiento de la potencia de la señal que transmite cada nodo con la distancia. Esta información se englobará en el inverso de una función $l : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^+$ creciente. Se le suele llamar función OPL de sus siglas en inglés: *Omnidirectional Path-Loss* (función de pérdida omnidireccional). Los modelos clásicos asumen que l toma, por ejemplo, alguna de las siguientes formas:

$$\text{(OPL1)} \quad l(r) = (A \max(r_0, r))^\beta,$$

$$\text{(OPL2)} \quad l(r) = (1 + Ar)^\beta,$$

$$\text{(OPL3)} \quad l(r) = (Ar)^\beta.$$

El segundo es un decaimiento (en inglés: *fading*) que es aleatorio para cada nodo y que refleja todas las posibles interferencias en el ambiente sobre las que no tenemos control. Asumiremos entonces que F_y^x es una variable aleatoria que representa el decaimiento por efecto del ambiente de la señal emitida por x y recibida en el punto y . Un modelo clásico (conocido como *Rayleigh Fading*) es asumir que F_y^x tiene distribución exponencial.

Pensaremos así que la potencia recibida en el punto $y \in \mathbb{R}^2$ por la transmisión del nodo X_i es:

$$P_r = \frac{P_t \cdot F_y^{X_i}}{l(|X_i - y|)} = \frac{F_y^{X_i}}{l(|X_i - y|)},$$

donde llamamos $F_y^{X_i} := P_t F_y^{X_i}$ para englobar toda la información pues asumimos que P_t es constante. A $F_y^{X_i}$ se le llama la *potencia virtual*.

Como nos interesa solamente medir las potencias recibidas en puntos del plano y que sean nodos, definiremos una familia de vectores aleatorios $\mathbf{F}_i = (F_i^j)_{j \in \mathbb{N}}$ donde F_i^j es la potencia virtual emitida por el nodo X_i hacia el nodo X_j . Asumimos que las $(F_i^j)_{j \in \mathbb{N}}$ son iid con distribución $G(t)$ y media $\frac{1}{\mu}$. Usaremos la siguiente notación:

- \mathbf{F} es un vector genérico con la misma distribución que cualquiera de los \mathbf{F}_i .
- \mathbf{f} es una realización de \mathbf{F} .
- F es una componente genérica de \mathbf{F} , o lo que es lo mismo, una variable aleatoria genérica con la misma distribución que cualquiera de las F_i^j .
- f es una realización de F .

Como \mathbf{F}_i es una propiedad de cada nodo X_i , la pensaremos como una marca. Formalmente, estas marcas pertenecen a un espacio \mathbb{F} que no es \mathbb{R}^d para ningún valor de d . En este caso, el concepto de marca, si bien es entendible y manejable para todas los cálculos que haremos, necesita de una definición formal más abarcadora (por ejemplo, la que se hace en [4]).

Estos son todos los elementos necesarios para el modelo que nos interesa. Vamos a suponer además que todos ellos son independientes entre sí para que $\tilde{\Phi} = \{(X_i, m_i, \mathbf{F}_i)\}_{i \in \mathbb{N}}$ sea un proceso puntual independientemente marcado de Poisson.

En conclusión, el criterio es el siguiente: para cada $X_i \in \tilde{\Phi}$ definimos el conjunto de vecinos de X_i como:

$$\mathcal{N}(X_i) = \left\{ (X_j, m_j, \mathbf{F}_j) \in \tilde{\Phi} : \frac{F_j^i}{l(|X_i - X_j|)} \geq M_0, j \neq i \right\},$$

donde M_0 es un umbral de detección (que fijamos a priori) y $l(\cdot)$ es una función positiva creciente.

Como el nodo X_i accede al medio si y solamente si $m_i < m_j \forall X_j \in \mathcal{N}(X_i)$, definiremos los indicadores de acceso al medio como:

$$e_i = \mathbf{1}(\forall X_j \in \mathcal{N}(X_i), m_i < m_j).$$

Finalmente, el conjunto de los nodos habilitados a transmitir forman un p.p. en \mathbb{R}^2 dado por:

$$\Phi_{\text{CSMA}} = \sum_{x_i \in \Phi} e_i x_i,$$

que es un refinamiento no independiente de Φ . Observemos que tiene una gran similitud con los procesos de Matérn Hard-Core vistos en el capítulo 2, pues en ambos casos el refinamiento elimina a X_i si no es el de menor marca en un conjunto aleatorio de puntos asociados a él.

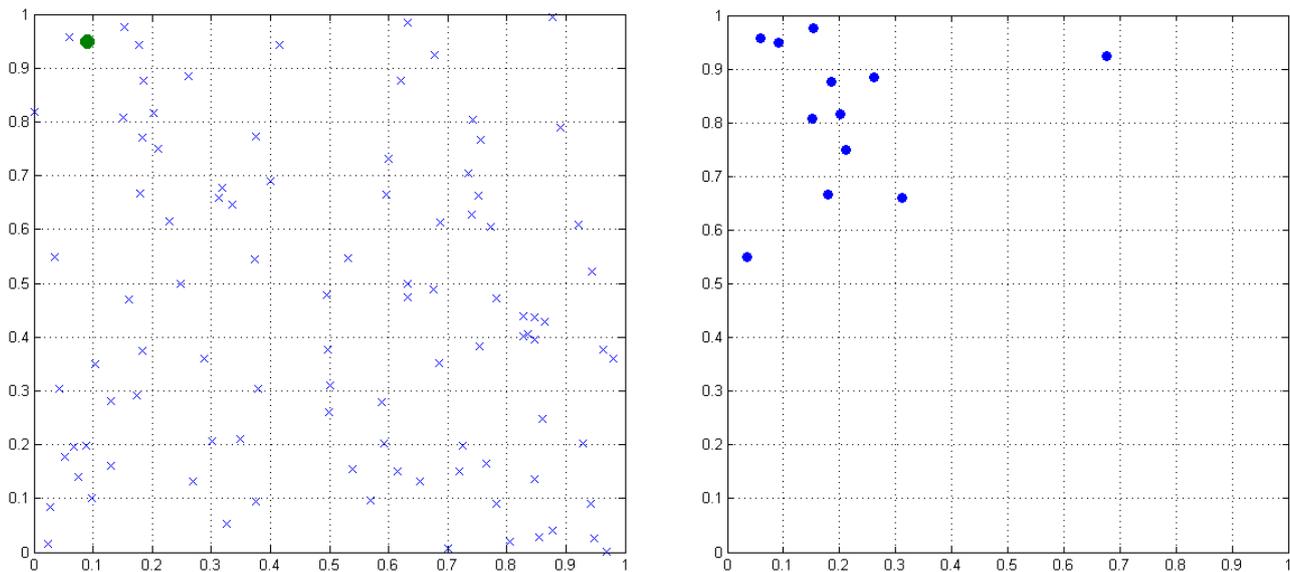


Figura 3.1: Simulación de Φ_{CSMA} con $\lambda = 100$, $M_0=10$, F con distribución $\text{Exp}(1)$ y $l(r) = r^{-\beta}$ con $\beta = 2.1$. En la figura de la izquierda se ve a un nodo X_i elegido al azar y en la figura de la derecha se ve el conjunto $\mathcal{N}(X_i)$

Observación 3.1.1. El conjunto $\mathcal{N}(X_i)$ puede, a priori, contener puntos lejanos a X_i si el valor de F_j^i es muy grande. La figura (3.1) ilustra esto.

Observación 3.1.2. Supongamos que tenemos tres nodos x_1, x_2 y x_3 con marcas $m_1 < m_2 < m_3$. Si $x_2 \in \mathcal{N}(x_1) \cap \mathcal{N}(x_3)$ pero $x_1 \notin \mathcal{N}(x_3)$ y $x_3 \notin \mathcal{N}(x_1)$ entonces x_1 no transmitiría porque x_2 es vecino con menor marca y x_2 no transmitiría por efecto de x_3 . Sin embargo, se podría permitir que x_1 y x_3 transmitieran simultáneamente porque ambos no se interfieren.

Este ejemplo nos dice que la estrategia de CSMA es conservadora: podría ser menos restrictiva e igual no se interferirían los nodos.

Observación 3.1.3. Si las marcas \mathbf{F}_i cumplen $F_i^j = F_i^k := F_i \forall j, k \in \mathbb{N}$ entonces la condición de $\mathcal{N}(X_i)$ se traduce en $l(|X_i - X_j|) \leq M_0 F_i \quad \forall j \in \mathbb{N}$. Por lo tanto, si $l(r) = r^2$, Φ_{CSMA} es un proceso de Matérn Hard-core del tipo II.

Más aún, si $F_i = F_j := F \quad \forall i, j \in \mathbb{N}$ donde F es una constante, Φ_{CSMA} es un proceso de Matérn Hard-core del tipo I.

Para poder evaluar el desempeño de este protocolo, podemos estudiar distintos elementos. Uno de ellos puede ser el que calcularemos a continuación: la probabilidad de acceso al medio.

3.1.1. Probabilidad de acceso al medio

Observemos primero que el proceso $\tilde{\Phi} = \{(X_i, m_i, \mathbf{F}_i)\}_{i \in \mathbb{N}}$ es estacionario en el sentido de los procesos marcados. Esto nos dice que tiene sentido hablar de la distribución del “punto típico”. Por eso, calcularemos primero el número $E^0 [\#\mathcal{N}(0)]$ que es la cantidad media de vecinos del punto típico.

Proposición 3.1.1. *Bajo las hipótesis y notaciones de esta sección, la cantidad media de vecinos del punto típico es:*

$$E^0 [\#\mathcal{N}(0)] = 2\pi\lambda \int_0^{+\infty} r (1 - G(M_0 l(r))) dr.$$

Demostración

Por definición, tenemos que:

$$\begin{aligned} E^0 [\#\mathcal{N}(0)] &= E^0 \left[\sum_{(X_j, m_j, \mathbf{F}_j) \in \tilde{\Phi} \setminus \{0\}} \mathbb{1} \left(\frac{F_j^0}{l(|X_j|)} \geq M_0 \right) \right] = \\ &= E^0 \left[\iiint_{\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R} \times \mathbb{F}} \mathbb{1} \left(\frac{F_x^0}{l(|x|)} \geq M_0, x \neq 0 \right) d\tilde{\Phi}(x, m, \mathbf{F}) \right]. \end{aligned}$$

Si pensamos que se puede definir f de modo que

$$f(x, m, \mathbf{F}, \tilde{\Phi} \setminus \{0, m_0, \mathbf{F}_0\}) = \mathbb{1} \left(\frac{F_x^0}{l(|x|)} \geq M_0, x \neq 0 \right),$$

entonces podemos aplicar la fórmula reducida de Campbell para procesos marcados (1.3.1) y obtener:

$$E^0 [\#\mathcal{N}(0)] = \int_{\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R} \times \mathbb{F}} \left(\int_{\mathbb{M}_M} \mathbb{1} (f_x^0 \geq M_0 l(|x|)) dP_{(m, \mathbf{F})}^! (\varphi_M) \right) dF_x(m, \mathbf{f}) d\Lambda(x),$$

donde

- la notación φ_M viene de ver cada $\tilde{\varphi} \in \tilde{\mathbb{M}}$ como $\tilde{\varphi} = \{(x_i, m_i, \mathbf{F}_i)\} = \{x_i\} \times \{(m_i, \mathbf{F}_i)\} = \varphi \times \varphi_M$,
- $dP_{(m, \mathbf{F})}^! (\varphi_M) = dP_{\Phi_M} (\varphi_M)$ porque Φ_M es Poisson (nuevamente precisamos una definición más formal de p.p. Poisson que abarque espacios abstractos como \mathbb{F} . Ver [4])
- $dF_x(m, \mathbf{F}) = dF_x(m) dP_{\mathbf{F}}(\mathbf{f}) = dH(m) dP_{\mathbf{F}}(\mathbf{f})$ pues $\tilde{\Phi}$ es independientemente marcado (recordemos que $G(F)$ es la distribución de cada componente F de el vector \mathbf{F} y que m tiene distribución $H(m)$),
- $d\Lambda(x) = \lambda dx$.

En definitiva nos queda que:

$$\begin{aligned}
 \mathbb{E}^0 [\#\mathcal{N}(0)] &= \lambda \int_{\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R} \times \mathbb{F}} \left(\int_{\tilde{\mathcal{M}}} \mathbf{1}(f_x^0 \geq M_0 l(|x|)) dP_{\Phi_M}(\varphi_M) \right) dP_{\mathbf{F}}(\mathbf{f}) dH(m) dx = \\
 &= \lambda \int_{\mathbb{R}^2} \int_0^{+\infty} \int_{\mathbb{F}} P(f_x^0 \geq M_0 l(|x|)) dP_{\mathbf{F}}(\mathbf{f}) dH(m) dx = \\
 &= \lambda \int_{\mathbb{R}^2} \int_{\mathbb{F}} 1 - G(M_0 l(|x|)) dP_{\mathbf{F}}(\mathbf{f}) dx = \lambda \int_{\mathbb{R}^2} 1 - G(M_0 l(|x|)) dx.
 \end{aligned}$$

Luego de un cambio a coordenadas polares obtenemos:

$$\mathbb{E}^0 [\#\mathcal{N}(0)] = 2\pi\lambda \int_0^{+\infty} r (1 - G(M_0 l(r))) dr.$$

■

Vamos a usar la notación $\bar{\mathcal{N}}$ para la constante obtenida tal que $\mathbb{E}^0 [\#\mathcal{N}(0)] = \lambda \bar{\mathcal{N}}$

Observación 3.1.4. La integral que define a $\bar{\mathcal{N}}$ podría no ser finita. En ese caso, no podemos hacer la interpretación que hacíamos sobre este valor.

Ejemplo 3.1.1. $\bar{\mathcal{N}}$ en un caso particular

Suponiendo Rayleigh Fading (es decir, $G(t) = 1 - e^{-\mu t}$) tenemos que:

$$\bar{\mathcal{N}} = 2\pi \int_0^{+\infty} r e^{-\mu M_0 l(r)} dr.$$

Bajo OPL3 (es decir, $l(r) = (Ar)^\beta$), si usamos partes y luego un cambio de variable $u = (\mu M_0 A^\beta) r^\beta$, obtenemos:

$$\begin{aligned}
 \bar{\mathcal{N}} &= 2\pi \int_0^{+\infty} r e^{-(\mu M_0 A^\beta) r^\beta} dr = 2\pi \int_0^{+\infty} \frac{r^2}{2} \beta (\mu M_0 A^\beta) r^{\beta-1} e^{-(\mu M_0 A^\beta) r^\beta} dr = \\
 &= \pi \int_0^{+\infty} \frac{1}{(\mu M_0)^{\frac{2}{\beta}} A^2} u^{\frac{2}{\beta}} e^{-u} du = \frac{\pi \Gamma(\frac{2}{\beta} + 1)}{(\mu M_0)^{\frac{2}{\beta}} A^2} = \frac{2\pi \Gamma(\frac{2}{\beta})}{\beta (\mu M_0)^{\frac{2}{\beta}} A^2}.
 \end{aligned}$$

Ahora que hallamos una expresión para $\bar{\mathcal{N}}$ podemos ir al cálculo que nos interesa:

Proposición 3.1.2. *Bajo las hipótesis y notaciones de esta sección, la probabilidad de acceso al medio es:*

$$p = \mathbb{E}^0[e_0] = \frac{1 - e^{-\lambda \bar{\mathcal{N}}}}{\lambda \bar{\mathcal{N}}}.$$

Observación 3.1.5. Notemos que si reemplazamos $\nu_d r^d$ por $\bar{\mathcal{N}}$, el resultado es análogo al obtenido en (2.1.2) para el proceso de Matérn Hard-Core. Ambas cantidades representan el número promedio de puntos que compiten con un nodo.

Demostración de la Proposición 3.1.2:

El procedimiento que seguiremos será condicionar primero respecto a un valor t de m_0 (la marca del punto típico) para luego hacer el caso general. Es decir: llamaremos $p_t = E^0[e_0 | m_0 = t]$ y tendremos que $p = \int p_t dH(t)$.

Para calcular p_t queremos expresar e_0 en función del valor de un shot-noise extremal. Es decir, queremos hallar un shot-noise $Z_{\tilde{\Phi}}$ tal que:

$$e_0 = \mathbf{1}(Z_{\tilde{\Phi}}(0) = 0) = \mathbf{1}\left(\forall (X_j, m_j, \mathbf{F}_j) \in \tilde{\Phi}, L(0, X_j, (m_j, \mathbf{F}_j)) = 0\right), \quad (3.1)$$

donde $Z_{\tilde{\Phi}}$ tiene función de respuesta L , es decir, se cumple que:

$$Z_{\tilde{\Phi}}(0) = \max_{(X_j, m_j, \mathbf{F}_j) \in \tilde{\Phi}} L(0, X_j, (m_j, \mathbf{F}_j))$$

para cierta función L que tenemos que definir. Podemos ver que la función L dada por:

$$L(X_i, X_j, (m_j, \mathbf{F}_j)) = \mathbf{1}(F_j^i \geq M_0 l(|X_i - X_j|)) \mathbf{1}(m_j < t) \quad \text{con } X_i \in \Phi, (X_j, m_j, \mathbf{F}_j) \in \tilde{\Phi}$$

es la que buscamos. Efectivamente: $L(0, X_j, (m_j, \mathbf{F}_j)) = 1$ si y solamente si X_j es un vecino del 0 con marca menor a la marca del 0 que es $m_0 = t$. Por lo tanto, para que e_0 tome el valor 1, no puede ocurrir que $L(0, X_j, (m_j, \mathbf{F}_j)) = 1$ para ningún j . Esto dice que la función L que definimos satisface (3.1).

Sigamos entonces calculando p_t bajo la expresión de e_0 dada por (3.1). Como e_0 solo toma los valores 0 o 1, tenemos que:

$$p_t = E^0[e_0 | m_0 = t_0] = P^0(Z_{\tilde{\Phi}} = 0 | m_0 = t) = P^0(Z_{\tilde{\Phi}} \leq 0 | m_0 = t).$$

La proposición (1.4.1) nos da la distribución de un shot-noise extremal, por lo cual:

$$p_t = \exp \left[- \int_{\mathbb{R}^2} \int_{\mathbb{R} \times \mathbf{F}} \mathbf{1}(L(0, x, (m, \mathbf{f})) > 0) dF_x(m, \mathbf{f}) d\Lambda(x) \right].$$

Ahora usaremos que el proceso puntual es independientemente marcado y de intensidad λ , y que la función L toma solo dos valores. Esto nos dice que:

$$p_t = \exp \left[-\lambda \int_{\mathbb{R}^2} \int_0^{+\infty} \int_{\mathbf{F}} \mathbf{1}(L(0, x, (m, \mathbf{f})) = 1) dH(m) dP_{\mathbf{F}}(\mathbf{f}) dx \right].$$

Como G es la distribución de una componente genérica F de \mathbf{F} :

$$p_t = \exp \left[-\lambda \int_{\mathbb{R}^2} \int_0^{+\infty} \left(\int_0^{+\infty} \mathbf{1}(f \geq M_0 l(|x|)) dG(f) \right) \mathbf{1}(m < t) dH(m) dx \right] =$$

$$= \exp \left[-\lambda \int_{\mathbb{R}^2} \int_0^t P(f \geq M_0 l(|x|)) \, dH(m) \, dx \right] = \exp \left[-\lambda H(t) \int_{\mathbb{R}^2} 1 - G(M_0 l(|x|)) \, dx \right].$$

Finalmente, tenemos que:

$$p_t = e^{-H(t)\lambda\bar{\mathcal{N}}}. \quad (3.2)$$

Por lo tanto, levantando el condicionamiento respecto a t :

$$\mathbb{E}^0[e_0] = \int_0^{+\infty} \mathbb{E}^0[e_0 | m_0 = t] \, dH(t) = \int_0^{+\infty} e^{-H(t)\lambda\bar{\mathcal{N}}} \, dH(t) = \frac{1 - e^{-\lambda\bar{\mathcal{N}}}}{\lambda\bar{\mathcal{N}}}.$$

■

Observación 3.1.6. En el caso que la integral que nos da $\bar{\mathcal{N}}$ no sea finita, tenemos que $p = 0$.

Proposición 3.1.3. *Bajo las hipótesis y notaciones de esta sección, la intensidad del p.p. Φ_{CSMA} es:*

$$\lambda_{\text{CSMA}} = \frac{1 - e^{-\lambda\bar{\mathcal{N}}}}{\bar{\mathcal{N}}}.$$

Demostración:

Si se define $\tilde{\Phi}_{\text{CSMA}} := \sum_{i \geq 1} \delta_{(X_i, m_i, \mathbf{F}_i, e_i)}$ y considero $B \subset \mathbb{R}^2$ tal que $m(B) = 1$ entonces:

$$\lambda_{\text{CSMA}} = \mathbb{E}[\Phi_{\text{CSMA}}(B)] = \mathbb{E}[\tilde{\Phi}_{\text{CSMA}}(B \times [0, +\infty) \times \mathbb{F} \times \{1\})] = \quad (3.3)$$

$$= \mathbb{E} \left[\int_B \int_0^{+\infty} \int_{\mathbb{F}} \int \mathbf{1}(e = 1) \, d\tilde{\Phi}_{\text{CSMA}}(x, m, \mathbf{F}, e) \right] = \quad (3.4)$$

$$= \int_B \int_0^{+\infty} \int_{\mathbb{F}} \int \mathbb{E}^0[\mathbf{1}(e = 1)] \, dP_{\mathbf{F}}(\mathbf{f}) \, dH(m) \, d\Phi(x) \, dP_{\Phi}(\varphi) = \quad (3.5)$$

$$= p \int_B \int d\Phi(x) \, dP_{\Phi}(\varphi) = p \cdot \mathbb{E}[\Phi(B)] = p \cdot \lambda m(B) = \frac{1 - e^{-\lambda\bar{\mathcal{N}}}}{\lambda\bar{\mathcal{N}}} \lambda = \frac{1 - e^{-\lambda\bar{\mathcal{N}}}}{\bar{\mathcal{N}}}.$$

■

Otro cálculo interesante que podemos hacer para conocer el desempeño del protocolo es la probabilidad de transmisión sabiendo que un nodo a distancia r tiene permitido transmitir. Si llamamos p_r a esta cantidad tenemos la siguiente proposición:

Proposición 3.1.4. *Bajo las hipótesis y notaciones de esta sección y definiendo p_r como:*

$$p_r = \mathbb{P}_0(X_0 = 0 \text{ sea retenido} \mid \Phi \text{ tiene un nodo a distancia } r \text{ de } 0),$$

tenemos que:

$$p_r = p - (G(M_0 l(r)) - 1) \left(\frac{1 - e^{-\lambda\bar{\mathcal{N}}}}{(\lambda\bar{\mathcal{N}})^2} - \frac{e^{-\lambda\bar{\mathcal{N}}}}{\lambda\bar{\mathcal{N}}} \right).$$

Demostración:

Llamemos $A = \{\exists x \in \Phi : |x| = r\}$. Entonces:

$$p_r = P_0(0 \in \Phi_{\text{CSMA}} \mid A) = \int_0^{+\infty} P_0(0 \in \Phi_{\text{CSMA}} \mid A, m_0 = t) dH(t) =$$

$$\int_0^{+\infty} P_0(0 \in \Phi_{\text{CSMA}} \mid A, m_0 = t, m_x < t) P_0(m_x < t) dH(t) + \quad (3.6)$$

$$\int_0^{+\infty} P_0(0 \in \Phi_{\text{CSMA}} \mid A, m_0 = t, m_x > t) P_0(m_x > t) dH(t). \quad (3.7)$$

Detengámonos en (3.6). Observemos que si $m_x < t$, 0 tiene probabilidad nula de ser retenido cuando $x \in \mathcal{N}(0)$ por lo que:

$$p_1 = P_0(0 \in \Phi_{\text{CSMA}} \mid A, m_0 = t, m_x < t) =$$

$$= P_0(0 \in \Phi_{\text{CSMA}} \mid A, m_0 = t, m_x < t, x \notin \mathcal{N}(0)) P_0(x \notin \mathcal{N}(0)),$$

donde los sucesos $A \cap \{m_x < t\} \cap \{x \notin \mathcal{N}(0)\}$ y $\{0 \in \Phi_{\text{M}}\}$ son independientes. Así que, si usamos la ecuación (3.2) de la proposición (3.1.2) podemos concluir que:

$$p_1 = P_0(0 \in \Phi_{\text{CSMA}} \mid m_0 = t) P_0(F_x^0 < M_0 l(|x|)) = p_t \cdot G(M_0 l(r)) = e^{-H(t)\lambda\bar{\mathcal{N}}} \cdot G(M_0 l(r)). \quad (3.8)$$

Ahora miremos (3.7). También es claro que los sucesos $A \cap \{m_x > t\}$ y $\{0 \in \Phi_{\text{CSMA}}\}$ son independientes cuando $m_0 = t$ así que:

$$p_2 = P_0(0 \in \Phi_{\text{CSMA}} \mid A, m_0 = t, m_x > t) = P_0(0 \in \Phi_{\text{CSMA}} \mid m_0 = t) = p_t = e^{-H(t)\lambda\bar{\mathcal{N}}}. \quad (3.9)$$

Usando (3.8) y (3.9) en la ecuación original para p_r podemos afirmar finalmente que:

$$p_r = \int_0^{+\infty} [p_1 H(t) + p_2 (1 - H(t))] dH(t) = \int_0^{+\infty} e^{-H(t)\lambda\bar{\mathcal{N}}} [H(t)G(M_0 l(r)) + (1 - H(t))] dH(t) =$$

$$= \int_0^1 e^{-u\lambda\bar{\mathcal{N}}} [uG(M_0 l(r)) + (1 - u)] du = \int_0^1 (G(M_0 l(r)) - 1) u e^{-u\lambda\bar{\mathcal{N}}} du + \int_0^1 e^{-u\lambda\bar{\mathcal{N}}} du =$$

$$= (G(M_0 l(r)) - 1) \left[-\frac{u e^{-u\lambda\bar{\mathcal{N}}}}{\lambda\bar{\mathcal{N}}} - \frac{e^{-u\lambda\bar{\mathcal{N}}}}{(\lambda\bar{\mathcal{N}})^2} \right]_0^1 - \frac{e^{-u\lambda\bar{\mathcal{N}}}}{\lambda\bar{\mathcal{N}}} \Big|_0^1 =$$

$$= (G(M_0 l(r)) - 1) \left[-\frac{e^{-\lambda\bar{\mathcal{N}}}}{\lambda\bar{\mathcal{N}}} - \frac{e^{-\lambda\bar{\mathcal{N}}}}{(\lambda\bar{\mathcal{N}})^2} + \frac{1}{(\lambda\bar{\mathcal{N}})^2} \right] + \frac{1 - e^{-\lambda\bar{\mathcal{N}}}}{\lambda\bar{\mathcal{N}}} =$$

$$= p - (G(M_0 l(r)) - 1) \left(\frac{1 - e^{-\lambda\bar{\mathcal{N}}}}{(\lambda\bar{\mathcal{N}})^2} - \frac{e^{-\lambda\bar{\mathcal{N}}}}{\lambda\bar{\mathcal{N}}} \right).$$

■

Como último indicador del desempeño del protocolo, calcularemos la probabilidad de que varios nodos dados accedan al medio al mismo tiempo:

3.1.2. Probabilidad conjunta de acceso al medio

Sean y_1, \dots, y_k nodos fijos. Por el teorema (1.2.4) (Sliynyak extendido a medidas factoriales de dimensión n) sabemos describir como es la distribución de $\tilde{\Phi}$ condicionado a que $y_i \in \tilde{\Phi} \forall i = 1, \dots, k$. Para eso, introduciremos las siguientes notaciones:

1. $\{\hat{m}_i\}_{i=1}^k$ son los contadores de back-off de los y_i , que representan el tiempo que espera cada nodo antes de reintentar la transmisión. Asumimos que son i.i.d., independientes de los elementos de $\tilde{\Phi}$ y que se distribuyen como H .
2. $\hat{\mathbf{F}}_j = (\hat{F}_j^1, \dots, \hat{F}_j^k)$ es el vector de las potencias virtuales emitidas por X_j hasta los y_i .
3. $\mathbf{H}_i = \{H_i^j\}_{j \in \mathbb{N}} \quad i = 1, \dots, k$ es el vector de las potencias virtuales emitidas por y_i hasta los X_j .
4. $\hat{\mathbf{H}}_i = (\hat{H}_i^1, \dots, \hat{H}_i^{i-1}, \hat{H}_i^{i+1}, \dots, \hat{H}_i^k)$ es el vector de las potencias virtuales emitidas por y_i hasta los y_j con $j \neq i$.

Estos tres últimos vectores asumimos que son iid, independientes entre sí y de los otros elementos considerados y que distribuyen como G .

Consideramos el p.p. $\hat{\Phi}$ definido por:

$$\hat{\Phi} = \left\{ \left(X_j, \left(m_j, \mathbf{F}_j, \hat{\mathbf{F}}_j \right) \right) : \left(X_j, m_j, \mathbf{F}_j \right) \in \tilde{\Phi} \right\} \cup \left\{ \left(y_i, \left(\hat{m}_i, \mathbf{H}_i, \hat{\mathbf{H}}_i \right) \right) : i = 1, \dots, k \right\}.$$

Entonces el teorema (1.2.4) nos asegura que la distribución de $\hat{\Phi}$ es la Palm de $\tilde{\Phi}$ condicionada a los puntos y_i .

Bajo esta nueva escritura, las vecindades de X_i e y_i son:

$$\mathcal{N}(X_i) = \mathcal{N}_{\Phi}(X_i) \cup \mathcal{N}_y(X_i), \quad \mathcal{N}(y_i) = \mathcal{N}_{\Phi}(y_i) \cup \mathcal{N}_y(y_i),$$

donde

$$\mathcal{N}_{\Phi}(X_i) = \left\{ X_j \in \Phi : \frac{F_j^i}{l(|X_i - X_j|)} \geq M_0 \right\}, \quad \mathcal{N}_y(X_i) = \left\{ y_j : \frac{H_j^i}{l(|X_i - y_j|)} \geq M_0, j = 1, \dots, k \right\},$$

$$\mathcal{N}_{\Phi}(y_i) = \left\{ X_j \in \Phi : \frac{\hat{F}_j^i}{l(|y_i - X_j|)} \geq M_0 \right\}, \quad \mathcal{N}_y(y_i) = \left\{ y_j : \frac{\hat{H}_j^i}{l(|y_i - y_j|)} \geq M_0, j = 1, \dots, k, j \neq i \right\},$$

y los indicadores de acceso al medio son:

$$e_i = \mathbb{1}(\forall X_j \in \mathcal{N}_{\Phi}(X_i), m_i < m_j) \mathbb{1}(\forall y_j \in \mathcal{N}_y(X_i), m_i < \hat{m}_j),$$

$$\hat{e}_i = \mathbb{1}(\forall X_j \in \mathcal{N}_{\Phi}(y_i), \hat{m}_i < m_j) \mathbb{1}(\forall y_j \in \mathcal{N}_y(y_i), \hat{m}_i < \hat{m}_j).$$

Proposición 3.1.5. *Supongamos que $0 < t_1 < \dots < t_k$. Entonces:*

$$p := \mathbb{P}(\forall i = 1, \dots, k \widehat{e}_i = 1 \mid \widehat{m}_1 = t_1, \dots, \widehat{m}_k = t_k) = \exp \left\{ -\lambda \sum_{J \subset \{1, \dots, k\}} (-1)^{|J|+1} H(t_{\min_{i \in J}}) \int_{\mathbb{R}^2} \prod_{i \in J} (1 - G(M_0 l(|x - y_i|))) dx \right\} \prod_{j=1}^k \prod_{i < j} G(M_0 l(|y_j - y_i|)).$$

En el caso particular en que $k=2$:

$$p = \exp \left[-\lambda \int_{\mathbb{R}^2} (H(t_1)f_1(x) + H(t_2)f_2(x) - H(t_1)f_1(x)f_2(x)) dx \right] G(M_0 l(|y_1 - y_2|))$$

donde:

$$f_i(x) = (1 - G(M_0 l(|x - y_i|))), \quad i = 1, 2.$$

Demostración:

Usaremos la misma idea que en la proposición (3.1.2): intentaremos de expresar los indicadores de acceso al medio en función de un shot-noise extremal ya que conocemos sus distribuciones.

Como un nodo y_i puede ser eliminado por un X_i o por un y_j , la función de respuesta que buscamos debe cumplir:

- $L(y_i, X_j, m_j, (\mathbf{F}_j, \widehat{\mathbf{F}}_j)) = 1$ si y solamente si y_i es eliminado por X_j que es pedir que X_j sea vecino de y_i y tenga marca menor. Por esto, se hace necesario que en este caso L tenga la forma:

$$L(y_i, X_j, m_j, (\mathbf{F}_j, \widehat{\mathbf{F}}_j)) = \mathbf{1}(\widehat{F}_j^i \geq P_0 l(|X_j - y_i|), m_j < \widehat{m}_i).$$

- $L(y_i, y_j, \widehat{m}_j, (\mathbf{H}_j, \widehat{\mathbf{H}}_j)) = 1$ si y solamente si y_i es eliminado por efecto de y_j que equivale a decir que y_j es vecino de y_i y tiene marca menor. En este caso, necesariamente:

$$L(y_i, y_j, \widehat{m}_j, (\mathbf{H}_j, \widehat{\mathbf{H}}_j)) = \mathbf{1}(\widehat{H}_j^i \geq P_0 l(|y_j - y_i|), \widehat{m}_j < \widehat{m}_i), \quad \text{si } i \neq j.$$

- Como no hay otra manera de que y_i resulte eliminado, diremos que L tiene esta forma para el resto de los casos:

$$L(z, x, m, (\mathbf{F}, \widehat{\mathbf{F}})) = 0 \quad \forall z \neq y_i \text{ para algún } i.$$

Es claro que bajo esta definición, si \widehat{e}_i es el indicador de que y_i es retenido, se cumple que:

$$\widehat{e}_i = \mathbf{1} \left(\forall (X_j, m_j, (\mathbf{F}_j, \widehat{\mathbf{F}}_j)) \in \widehat{\Phi}, L(y_i, X_j, m_j, (\mathbf{F}_j, \widehat{\mathbf{F}}_j)) = 0 \right) \cdot \mathbf{1} \left(\forall j \neq i, L(y_i, y_j, \widehat{m}_j, (\mathbf{H}_j, \widehat{\mathbf{H}}_j)) = 0 \right).$$

Siguiendo la misma idea que en (3.1.2), definimos $Z_{\widehat{\Phi}}(y_i)$ como el shot-noise extremal con función de respuesta L y así tenemos que

$$\widehat{e}_i = \mathbf{1}(Z_{\widehat{\Phi}}(y_i) = 0).$$

Entonces:

$$p = \mathbb{P}_{t_1, \dots, t_k}(Z_{\widehat{\Phi}}(y_1) = 0, \dots, Z_{\widehat{\Phi}}(y_k) = 0) = \mathbb{P}_{t_1, \dots, t_k}(Z_{\widehat{\Phi}}(y_1) \leq 0, \dots, Z_{\widehat{\Phi}}(y_k) \leq 0).$$

donde estamos usando la notación $\mathbb{P}_{t_1, \dots, t_k}(\cdot) = \mathbb{P}(\cdot \mid \widehat{m}_1 = t_1, \dots, \widehat{m}_k = t_k)$.

Para alivianar notación, supondremos ahora que $k = 2$. La demostración se extiende sencillamente al caso general usando los mismos razonamientos.

Antes que nada, llamando $A = \{y_1 \in \mathcal{N}(y_2)\}$ separemos en los casos:

$$p = P_{t_1, t_2}(Z_{\widehat{\mathbf{f}}}(y_1) \leq 0, Z_{\widehat{\mathbf{f}}}(y_2) \leq 0 \mid A) P(A) + P_{t_1, t_2}(Z_{\widehat{\mathbf{f}}}(y_1) \leq 0, Z_{\widehat{\mathbf{f}}}(y_2) \leq 0 \mid A^c) P(A^c),$$

y ahora observemos que como estamos condicionando a que la marca de y_1 es $t_1 < t_2$ que es la marca de y_2 , no puede ocurrir el suceso A pues eso implicaría que y_1 sería un vecino de y_2 con marca menor, eliminándolo efectivamente. En definitiva:

$$p = P_{t_1, t_2}(Z_{\widehat{\mathbf{f}}}(y_1) \leq 0, Z_{\widehat{\mathbf{f}}}(y_2) \leq 0 \mid y_1 \notin \mathcal{N}(y_2)) G(M_{0l}(|y_2 - y_1|)) = \bar{p} G(M_{0l}(|y_2 - y_1|)).$$

Usaremos ahora la proposición (1.4.1) para dar la distribución de $Z_{\widehat{\mathbf{f}}}$ (escribiremos $L(z, x, m, (\mathbf{f}, \widehat{\mathbf{f}})) = L(z, x)$ cuando las marcas de x estén dadas implícitamente):

$$\bar{p} = \exp \left\{ - \iiint_{\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R} \times \mathbb{F}} [1 - \mathbf{1}(L(y_1, x) \leq 0) \mathbf{1}(L(y_2, x) \leq 0)] dF_x(m, (\mathbf{f}, \widehat{\mathbf{f}})) d\widehat{\Lambda}(x) \right\}.$$

Primero veamos quién es $\widehat{\Lambda}$:

$$\widehat{\Lambda}(B) = E \left[\widehat{\Phi}(B \times \mathbb{R} \times \mathbb{F}) \right] = E \left[\Phi(B) + \delta_{y_1}(B) + \delta_{y_2}(B) \right] = \Lambda(B) + \delta_{y_1}(B) + \delta_{y_2}(B).$$

Por lo tanto $d\widehat{\Lambda}(x) = d\Lambda(x) + \delta_{y_1}(x) + \delta_{y_2}(x)$ y así $\bar{p} = p_1 p_2 p_3$ con:

$$p_1 = \exp \left\{ - \iiint_{\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R} \times \mathbb{F}} [1 - \mathbf{1}(L(y_1, x) = 0) \mathbf{1}(L(y_2, x) = 0)] dF_x(m, (\mathbf{f}, \widehat{\mathbf{f}})) d\Lambda(x) \right\},$$

$$p_2 = \exp \left\{ - \iint_{\mathbb{R} \times \mathbb{F}} [1 - \mathbf{1}(L(y_1, y_1) = 0) \mathbf{1}(L(y_2, y_1) = 0)] dF_x(m, (\mathbf{f}, \widehat{\mathbf{f}})) \right\},$$

$$p_3 = \exp \left\{ - \iint_{\mathbb{R} \times \mathbb{F}} [1 - \mathbf{1}(L(y_1, y_2) = 0) \mathbf{1}(L(y_2, y_2) = 0)] dF_x(m, (\mathbf{f}, \widehat{\mathbf{f}})) \right\}.$$

Ahora veamos que:

- $\mathbf{1}(L(y_i, y_i) = 0) \equiv 1$, $i = 1, 2$ pues no puede ocurrir que y_i se autoelimine.
- $\mathbf{1}(L(y_1, y_2) = 0) \equiv 1$ porque $\widehat{m}_2 = t_2 > t_1 = \widehat{m}_1$ entonces y_2 no elimina a y_1 .
- $\mathbf{1}(L(y_2, y_1) = 0) \equiv 1$ debido a que estamos condicionando al suceso $A^c = \{y_1 \notin \mathcal{N}(y_2)\}$.

Es decir que $p_2 = p_3 = 1$; resta solo conocer p_1 . Para esto, estudiemos la función $f(x)$ que se integra según $d\Lambda(x)$:

$$f(x) = \iint_{\mathbb{R} \times \mathbb{F}} [1 - \mathbf{1}(L(y_1, x) = 0) \mathbf{1}(L(y_2, x) = 0)] dF_x(m, (\mathbf{f}, \widehat{\mathbf{f}})).$$

Escribamos $Y_i = \{L(y_i, x) = 0\}$, $i = 1, 2$ para afirmar que:

$$\begin{aligned} 1 - \mathbf{1}(Y_1) \mathbf{1}(Y_2) &= 1 - \mathbf{1}(Y_1 \cap Y_2) = \mathbf{1}((Y_1^c \cup Y_2^c) = \\ &= \mathbf{1}(Y_1^c) + \mathbf{1}(Y_2^c) - \mathbf{1}(Y_1^c \cap Y_2^c) = \mathbf{1}(Y_1^c) + \mathbf{1}(Y_2^c) - \mathbf{1}(Y_1^c) \mathbf{1}(Y_2^c), \end{aligned}$$

y así obtener que, fijando $i = 1, 2$:

$$\begin{aligned} \iint_{\mathbb{R} \times \mathbb{F}} \mathbf{1}(Y_i^c) dF_x(m, (\mathbf{F}, \widehat{\mathbf{F}})) &= \iint_{\mathbb{R} \times \mathbb{R}} \mathbf{1}(f^i \geq P_0 l(|x - y_i|)) \mathbf{1}(m < t_i) dH(m) dG(f^i) = \\ &= H(t_i) (1 - G(P_0 l(|x - y_i|))) = H(t_i) f_i(x). \end{aligned} \quad (3.10)$$

Por la independencia de las componentes del vector $(\mathbf{F}, \widehat{\mathbf{F}})$:

$$\begin{aligned} &\iint_{\mathbb{R} \times \mathbb{F}} \mathbf{1}(Y_1^c) \mathbf{1}(Y_2^c) dF_x(m, (\mathbf{f}, \widehat{\mathbf{f}})) = \\ &= \iint_{\mathbb{R} \times \mathbb{R}} \mathbf{1}(f^1 \geq P_0 l(|x - y_1|)) \mathbf{1}(m < t_1) \mathbf{1}(f^2 \geq P_0 l(|x - y_2|)) \mathbf{1}(m < t_2) dH(m) dG(f^1) dG(f^2) = \\ &= \min\{H(t_1), H(t_2)\} (1 - G(P_0 l(|x - y_1|))) (1 - G(P_0 l(|x - y_2|))) = H(t_1) f_1(x) f_2(x). \end{aligned} \quad (3.11)$$

Finalmente, juntando (3.10) y (3.11) tenemos que:

$$\begin{aligned} p_1 &= \exp \left[- \int_{\mathbb{R}^2} f(x) d\Lambda(x) \right] = \exp \left[- \lambda \int_{\mathbb{R}^2} \mathbf{1}(Y_1^c) + \mathbf{1}(Y_2^c) - \mathbf{1}(Y_1^c) \mathbf{1}(Y_2^c) dx \right] = \\ &= \exp \left[- \lambda \int_{\mathbb{R}^2} (H(t_1) f_1(x) + H(t_2) f_2(x) - H(t_1) f_1(x) f_2(x)) dx \right]. \end{aligned}$$

■

Corolario 3.1.1. *La probabilidad de acceso conjunto al medio es conocida y se calcula así:*

$$p_{y_1, \dots, y_k} = \int_{\mathbb{R}^k} \mathbb{P}(\forall i = 1, \dots, k \widehat{e}_i = 1 \mid \widehat{m}_1 = t_1, \dots, \widehat{m}_k = t_k) dH(t_1) \dots dH(t_k).$$

■

3.1.3. Shot-noise extremal con umbral aleatorio

Una generalización razonable del modelo que estamos estudiando es considerar que el umbral M_0 descrito al principio de esta sección es aleatorio y se sortea en cada intento de transmisión, siendo el mismo para todos los nodos en un instante dado. Nos dedicaremos ahora a extender los cálculos hechos en la sección (3.1.1) para este nuevo modelo. En general, no será complicado:

Llamemos Φ_{ext} al p.p. definido en (3.1.1) con umbral de detección M aleatorio. Si nos abocamos a calcular la intensidad de Φ_{ext} , es sencillo ver que el razonamiento empleado en la Proposición (3.1.3) es adaptable a este proceso y nos sirve para afirmar que la intensidad de Φ_{ext} es λp donde p es la probabilidad de Palm de retención del punto típico. Por lo tanto, solo es necesario calcular este valor p para Φ_{ext} , lo cual haremos a continuación:

Proposición 3.1.6. *Si utilizamos la notación p_0^{ext} para referirnos a la probabilidad de acceso al medio de Φ_{CSMA} con umbral M_0 determinista y llamamos \hat{p}_0^{ext} a la probabilidad de acceso al medio de Φ_{ext} en el caso que el umbral M tiene distribución $M(s) = \text{P}(M \leq s)$, entonces tenemos que:*

$$\hat{p}_0^{\text{ext}} = \int_{\mathbb{R}^+} p_0^{\text{ext}}(s) \, dM(s) = \int_{\mathbb{R}^+} \frac{1 - e^{-\lambda \bar{\mathcal{N}}(s)}}{\lambda \bar{\mathcal{N}}(s)} \, dM(s).$$

Demostración:

Usemos la notación E_t^0 para referirnos a la esperanza E^0 condicionando a $m_0 = t$ (m_0 es la marca del punto típico). Entonces, si $e_0(M)$ es el indicador de acceso al medio del punto típico cuando el umbral de detección es M :

$$\begin{aligned} \hat{p}_0^{\text{ext}} = E^0[e_0(M)] &= \int_{\mathbb{R}^+} E_t^0[e_0(M)] \, dH(t) = \int_{\mathbb{R}^+} \int_{\mathbb{R}^+} E_t^0[e_0(s)|M=s] \, dH(t) \, dM(s) = \\ &= \int_{\mathbb{R}^+} \int_{\mathbb{R}^+} e^{-H(t)\lambda \bar{\mathcal{N}}(s)} \, dH(t) \, dM(s) = \int_{\mathbb{R}^+} \frac{1 - e^{-\lambda \bar{\mathcal{N}}(s)}}{\lambda \bar{\mathcal{N}}(s)} \, dM(s). \end{aligned}$$

■

Observación 3.1.7. Nuevamente es de notar que $\bar{\mathcal{N}}(M_0)$ puede no ser finito. En este caso, interpretamos que la probabilidad \hat{p}_0^{ext} es 0.

Así como hicimos con la intensidad, vamos a extender el cálculo de la probabilidad de retener a un nodo condicionando a que hay un nodo que tiene permitido transmitir a distancia r que hicimos en la sección anterior. Llamemos p_r^{ext} a la probabilidad que calculamos en la proposición (3.1.4) bajo el nombre de p_r . Recordemos que:

$$p_r = p_r^{\text{ext}}(M_0) = p_0^{\text{ext}}(M_0) + (G(M_0 l(r)) - 1) \left(\frac{1 - e^{-\lambda \bar{\mathcal{N}}(M_0)}}{(\lambda \bar{\mathcal{N}}(M_0))^2} - \frac{e^{-\lambda \bar{\mathcal{N}}(M_0)}}{\lambda \bar{\mathcal{N}}(M_0)} \right).$$

Condicionando respecto al valor del umbral M de una manera casi idéntica a la demostración de la proposición (3.1.6) probamos el siguiente resultado:

Proposición 3.1.7. Si \widehat{p}_r^{ext} se define como:

$$\widehat{p}_r^{ext} = P_0(X_0 = 0 \text{ sea retenido} \mid \Phi \text{ tiene un nodo a distancia } r \text{ de } 0)$$

cuando el proceso de tipo Matérn es Φ_{ext} con umbral de detección M aleatorio con distribución $M(s)$, entonces:

$$\widehat{p}_r^{ext} = \int_{\mathbb{R}} p_r^{ext}(s) dM(s) = \widehat{p}_0^{ext} + \int_{\mathbb{R}} \left(\frac{1 - e^{-\lambda\bar{N}(s)}}{(\lambda\bar{N}(s))^2} - \frac{e^{-\lambda\bar{N}(s)}}{\lambda\bar{N}(s)} \right) dM(s).$$

■

3.2. Modelo de Matérn con Shot-Noise Aditivo

En la sección (3.1) utilizamos un modelo de tipo Matérn Hard-Core para modelar un protocolo de acceso al medio de tipo CSMA. Este modelo puede expresarse naturalmente en términos de un shot-noise de la siguiente manera: definamos

$$L((X_i, m_i, \mathbf{F}_i), (X_j, m_j, \mathbf{F}_j)) = \frac{F_j^i}{l(|X_i - X_j|)} \mathbb{1}(m_j < m_i),$$

utilizando las mismas notaciones que en la sección anterior. Escribiremos a partir de ahora $L(X_i, X_j)$ cuando se sobreentienda cuáles son las marcas m, \mathbf{F} de los puntos. Es claro que el proceso Φ_{CSMA} de la sección anterior (que llamamos Φ_{ext}) se puede describir como:

$$\Phi_{ext} = \left\{ X_i \in \Phi : \max_{(X_j, m_j, \mathbf{F}_j) \in \tilde{\Phi}} L(X_i, X_j) < M_0 \right\}$$

En este caso, recurrimos al shot-noise extremal engendrado por L , pues siguiendo la interpretación que dimos en la sección (1.4), el shot-noise extremal tiene en cuenta el efecto máximo de la red de nodos sobre un nodo particular.

Es entonces natural tomar el shot-noise aditivo que tiene a L como función de respuesta para modelar un protocolo que contemple la suma de las interferencias de los nodos de la red sobre cada nodo. Sea Φ_{add} el proceso definido de esta manera, es decir:

$$\Phi_{add} = \left\{ X_i \in \Phi : \int_{\mathbb{R}^d \times \mathbb{R} \times \mathbb{F}} L(X_i, x) d\tilde{\Phi}(x, m, f) = \sum_{(X_j, m_j, \mathbf{F}_j) \in \tilde{\Phi}} L(X_i, X_j) < S_0 \right\}, \quad (3.12)$$

donde S_0 es un umbral de detección que juega un papel análogo a M_0 para Φ_{ext} . En esta sección estudiaremos el proceso puntual Φ_{add} considerando al igual que para Φ_{ext} los casos en que el umbral S_0 es determinista (es decir, una constante positiva) y aleatorio.

3.2.1. Shot-noise aditivo con umbral determinista

Queremos dedicarnos al cálculo de p_0^{add} que es la probabilidad de retener al punto típico de Φ_{add} con umbral determinista S_0 . Para eso, introduciremos la notación:

$$S^t(X_i) = S^t(X_i, t, \mathbf{F}_i) := \sum_{(X_j, m_j, \mathbf{F}_j) \in \tilde{\Phi}^t} \frac{F_j^i}{l(|X_i - X_j|)}$$

donde

$$\tilde{\Phi}^t = \{(X_j, m_j, \mathbf{F}_j) \in \tilde{\Phi} : m_j < t\}.$$

En definitiva, $S^t(X_i)$ es el valor del shot-noise aditivo que define al proceso Φ_{add} evaluado en un punto X_i con marca t . En consecuencia la condición de retención de X_i se traduce en $\{S^t(X_i) < S_0\}$ y podemos definir el indicador de acceso al medio pde un punto típico de Φ_{add} como:

$$e_0 = \mathbb{1}(S^t(0) < S_0).$$

Por el teorema (1.2.2) de Slivnyak (y usando que el p.p. $\tilde{\Phi}$ es de Poisson independientemente marcado y estacionario), la distribución de $S^t(X_i)$ es igual a la de $S^t(0)$. Entonces se cumple que:

$$p_0^{\text{add}} = \mathbb{E}^0[e_0] = \int_0^{+\infty} \mathbb{P}^0(e_0 = 1 | m_0 = t) dH(t) = \int_0^{+\infty} \mathbb{P}(S^t(0) < S_0) dH(t). \quad (3.13)$$

A diferencia del caso extremal, no es fácil conocer explícitamente la distribución de $S^t(0)$, por lo que el cálculo de p_0^{add} es en general difícil. Sin embargo, en ciertos casos particulares, podemos recuperar información sobre $S^t(0)$, por ejemplo a través Baccelli Tomo 1su transformada de Laplace:

Proposición 3.2.1. *La transformada de Laplace del shot-noise aditivo $S^t(0)$ es:*

$$\mathcal{L}_{S^t(0)}(s) = e^{-\lambda H(t) \mathcal{K}(s)} \quad \text{donde} \quad \mathcal{K}(s) = \int_{\mathbb{R}^d} 1 - \mathcal{L}_G\left(\frac{s}{l(|x|)}\right) dx.$$

Demostración:

Usemos la definición de transformada de Laplace de un shot-noise (definición (1.4.2)):

$$\mathcal{L}_{S^t(0)}(s) = \mathbb{E}\left[e^{-sS^t(0)}\right] = \mathbb{E}\left[\exp\left(-s \sum_{(X_j, m_j, \mathbf{F}_j) \in \tilde{\Phi}^t} L(0, X_j)\right)\right] = \mathcal{L}_{\tilde{\Phi}^t}(sL(0, \cdot)).$$

donde $\mathcal{L}_{\tilde{\Phi}^t}$ es la transformada de Laplace de $\tilde{\Phi}^t$. Observemos que $\tilde{\Phi}^t = \{(X_j, m_j, \mathbf{F}_j) \in \tilde{\Phi} : m_j < t\}$ es claramente un refinamiento independiente de $\tilde{\Phi}$ y es por lo tanto un p.p. de Poisson cuya intensidad $\tilde{\Lambda}^t$ es conocida gracias a la proposición (1.1.5):

$$\tilde{\Lambda}^t(A) = \int_A \mathbb{P}(m < t) d\tilde{\Lambda}(x, m, f) = H(t)\tilde{\Lambda}(A).$$

Así que:

$$\mathcal{L}_{\tilde{\Phi}^t}(sL(0, \cdot)) = \exp\left[-\lambda H(t) \iiint_{\mathbb{R}^d \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}} \left(1 - e^{-s \frac{f}{l(|x|)}}\right) dG(f) dH(m) dx\right] =$$

$$= \exp \left[-\lambda H(t) \int_{\mathbb{R}^d} 1 - \left(\int_{\mathbb{R}} e^{-f\left(\frac{s}{l(|x|)}\right)} dG(f) \right) dx \right] = e^{-\lambda H(t) \int_{\mathbb{R}^d} 1 - \mathcal{L}_G(s/l(|x|)) dx}.$$

Introduciendo la notación

$$\mathcal{K}(s) = \int_{\mathbb{R}^d} 1 - \mathcal{L}_G\left(\frac{s}{l(|x|)}\right) dx$$

la proposición queda probada. ■

La siguiente proposición (probada en [1]) nos permite recuperar en ciertos casos la distribución de $S^t(0)$ a partir de su transformada de Laplace:

Proposición 3.2.2. *Si el shot-noise $S^t(0)$ admite una densidad f que es una función de cuadrado integrable entonces:*

$$\int_a^b f(t) dt = \int_{\mathbb{R}} \mathcal{L}_{S^t(0)}(2\pi i s) \frac{e^{-2\pi i a s} - e^{-2\pi i b s}}{2\pi i s} ds$$

3.2.2. Shot-noise aditivo con umbral aleatorio

Trabajaremos ahora con un proceso puntual Φ_{add} definido al igual que antes por la ecuación (3.12) pero donde ahora el umbral de detección es una variable aleatoria S . Veremos que bajo ciertas hipótesis sobre la distribución de S , es posible realizar cálculos como los que hicimos para Φ_{ext} :

Proposición 3.2.3. *Sea Φ_{add} un p.p. definido en término de un shot-noise aditivo usando las notaciones de esta sección. Llamemos \hat{p}_0^{add} a la probabilidad de acceso al medio en este caso. Si el umbral de detección S es aleatorio con distribución exponencial de parámetro γ , independiente de los elementos de $\tilde{\Phi}$ y $\mathcal{K}(s)$ es la función definida en la proposición (3.2.1) entonces:*

$$\hat{p}_0^{\text{add}} = \frac{1 - e^{-\lambda \mathcal{K}(\gamma)}}{\lambda \mathcal{K}(\gamma)}.$$

Demostración:

Retomemos la ecuación (3.13) que sabemos es cierta en este caso:

$$\begin{aligned} \hat{p}_0^{\text{add}} &= \int_0^{+\infty} P(S^t(0) < S) dH(t) = \int_0^{+\infty} \int_0^{+\infty} P(s < S) dP_{S^t(0)}(s) dH(t) = \\ &= \int_0^{+\infty} \int_0^{+\infty} e^{-\gamma s} dP_{S^t(0)}(s) dH(t) = \int_0^{+\infty} \mathcal{L}_{S^t(0)}(\gamma) dH(t) = \int_0^{+\infty} e^{-\lambda H(t) \mathcal{K}(\gamma)} dH(t) = \\ &= \int_0^1 e^{-t \lambda \mathcal{K}(\gamma)} dt = \frac{1 - e^{-\lambda \mathcal{K}(\gamma)}}{\lambda \mathcal{K}(\gamma)}. \end{aligned}$$

■

Observación 3.2.1. Observemos que obtuvimos un resultado muy similar al de la proposición (3.1.2) pero donde sustituimos $\tilde{\mathcal{N}}$ por $\mathcal{K}(\gamma)$.

Observación 3.2.2. Análogamente al caso de la observación (3.1.4), $\mathcal{K}(\gamma)$ puede no ser finito y por lo tanto la probabilidad \hat{p}_0^{add} puede ser nula.

Ahora intentaremos obtener una extensión del resultado de la proposición (3.1.4) para el proceso Φ_{add} . Podemos aplicar una idea muy similar a la que usamos para calcular p_r^{ext} , pero necesitaríamos conocer la distribución del shot-noise $S^t(0)$. Es por eso que consideraremos el caso particular en que el umbral S tiene distribución exponencial:

Proposición 3.2.4. *Sea Φ_{add} un p.p. definido en término de un shot-noise aditivo usando las notaciones de esta sección. Llamemos \hat{p}_r^{add} a la probabilidad definida por:*

$$\hat{p}_r^{\text{ext}} = P_0(X_0 = 0 \text{ sea retenido} \mid \Phi \text{ tiene un nodo a distancia } r \text{ de } 0)$$

cuando el proceso de tipo Matérn es Φ_{add} con umbral de detección S aleatorio con distribución exponencial de parámetro γ , independiente de los elementos de $\tilde{\Phi}$. Entonces:

$$\hat{p}_r^{\text{add}} = \hat{p}_0^{\text{add}} + (\mathcal{L}_G(\gamma l(r)) - 1) \left(\frac{1 - e^{-\lambda \mathcal{K}(\gamma)}}{(\lambda \mathcal{K}(\gamma))^2} - \frac{e^{-\lambda \mathcal{K}(\gamma)}}{\lambda \mathcal{K}(\gamma)} \right).$$

Demostración:

Haremos una demostración muy similar a la de la proposición (3.1.4): los razonamientos serán los mismos, solamente cambian las notaciones y cantidades.

Llamemos $A = \{\exists X_i \in \Phi : |X_i| = r\}$ y $P_0^t(\cdot) = P_0(\cdot \mid m_0 = t)$. Entonces:

$$\begin{aligned} \hat{p}_r^{\text{add}} &= P_0(0 \in \Phi_{\text{add}} \mid A) = \int_0^{+\infty} P_0^t(0 \in \Phi_{\text{add}} \mid A) dH(t) = \\ &= \int_0^{+\infty} P_0^t(0 \in \Phi_{\text{add}} \mid A, m_{X_i} < t) P_0(m_{X_i} < t) + P_0^t(0 \in \Phi_{\text{add}} \mid A, m_{X_i} > t) P_0(m_{X_i} < t) dH(t), \end{aligned} \quad (3.14)$$

donde:

$$P_0^t(0 \in \Phi_{\text{add}} \mid A, m_{X_i} > t) = P_0^t(0 \in \Phi_{\text{add}}) = P(S^t(0) < S) = e^{-\lambda H(t) \mathcal{K}(\gamma)} \quad (3.15)$$

y en el caso en que $m_{X_i} < t$, si ocurre $B = \{L(0, X_i) > S\}$ es seguro que $S^t(0) = \sum L(0, X_j) > S$ entonces 0 sería eliminado. Por lo tanto:

$$P_0^t(0 \in \Phi_{\text{add}} \mid A, m_{X_i} < t) = P_0^t(0 \in \Phi_{\text{add}} \mid A, m_{X_i} < t, B^c) P(B^c). \quad (3.16)$$

Además tenemos que por un lado:

$$P(B^c) = P\left(\frac{F_i^0}{l(r)} < S\right) = \int_{\mathbb{R}} P\left(\frac{f}{l(r)} < S\right) dG(f) = \int_{\mathbb{R}} e^{-f \gamma (l(r))^{-1}} dG(f) = \mathcal{L}_G\left(\frac{\gamma}{l(r)}\right).$$

Por lo que (3.16) queda:

$$\begin{aligned} P_0^t(0 \in \Phi_{\text{add}} | A, m_{X_i} < t, B^c) P(B^c) &= P_0^t \left(\sum L(0, X_j) < S | L(0, X_i) < S \right) P(B^c) = \\ &= P_0^t \left(\sum L(0, X_j) < S \right) P(B^c) = P(S^t(0) < S) P(B^c) = e^{-\lambda H(t) \mathcal{K}(\gamma)} \mathcal{L}_G \left(\frac{\gamma}{l(r)} \right). \end{aligned}$$

Usando esta última igualdad y la ecuación (3.15) en (3.14) concluimos que:

$$\begin{aligned} \hat{p}_r^{\text{add}} &= \int_0^{+\infty} e^{-\lambda H(t) \mathcal{K}(\gamma)} \left[H(t) \mathcal{L}_G \left(\frac{\gamma}{l(r)} \right) + (1 - H(t)) \right] dH(t) = \\ &= \frac{1 - e^{-\lambda \mathcal{K}(\gamma)}}{\lambda \mathcal{K}(\gamma)} + (\mathcal{L}_G(\gamma l(r)) - 1) \left(\frac{1 - e^{-\lambda \mathcal{K}(\gamma)}}{(\lambda \mathcal{K}(\gamma))^2} - \frac{e^{-\lambda \mathcal{K}(\gamma)}}{\lambda \mathcal{K}(\gamma)} \right). \end{aligned}$$

■

Observación 3.2.3. Nuevamente obtuvimos un resultado que se diferencia de su análogo para el caso extremal (3.1.4) en que se sustituye $\bar{\mathcal{N}}$ por $\mathcal{K}(\gamma)$, y además se cambia la distribución del umbral M por la transformada de Laplace de la distribución G .

3.3. Comparando los protocolos

Esta sección expone los resultados descritos en el artículo [7] por Baccelli y Bermolen.

A partir de ahora, nos centraremos en el estudio asintótico para redes con muchos nodos, que tiene sentido si pensamos que hoy en día existen redes inalámbricas como las de telefonía celular o internet a las que tienen acceso una vasta cantidad de usuarios al mismo tiempo. Bajo ciertas hipótesis y con un valor grande de la intensidad λ (que representa la cantidad de nodos por unidad de área) vamos a poder comparar el desempeño del protocolo asociado Φ_{add} con el de Φ_{ext} .

Supondremos entonces que la dimensión $d = 2$, la distribución G de las componentes de los vectores de potencias \mathbf{F} es exponencial de parámetro μ y que la función l es $l(r) = (Ar)^{-\beta}$ con $A > 0$ y $\beta > 2$.

Umbral determinista versus umbral aleatorio

Recordemos que por las proposiciones (3.1.2) y (3.1.6) tenemos que para el caso en que el umbral determinista de Φ_{ext} es M_0 y el umbral aleatorio distribuye como $\text{Exp}(\gamma)$:

$$p_0^{\text{ext}} = \frac{1 - e^{-\lambda \bar{\mathcal{N}}(M_0)}}{\lambda \bar{\mathcal{N}}(M_0)} \quad \text{y} \quad \hat{p}_0^{\text{ext}} = \int_{\mathbb{R}^+} \frac{1 - e^{-\lambda \bar{\mathcal{N}}(s)}}{\lambda \bar{\mathcal{N}}(s)} \gamma e^{-\gamma s} ds,$$

donde $\bar{\mathcal{N}}(s)$ fue calculado en el ejemplo (3.1.1) y nos dio:

$$\bar{\mathcal{N}}(s) = \frac{2\pi\Gamma(\frac{2}{\beta})}{\beta(\mu s)^{\frac{2}{\beta}} A^2}.$$

Podemos concluir entonces que:

$$\lim_{\lambda \rightarrow +\infty} \lambda p_0^{\text{ext}} = \frac{(\mu M_0)^{2/\beta} A^2}{\pi \Gamma(1 + 2/\beta)}, \quad (3.17)$$

$$\lim_{\lambda \rightarrow +\infty} \lambda \widehat{p}_0^{\text{ext}} = \frac{\mu^{2/\beta} A^2}{\pi \Gamma(1 + 2/\beta)} \int_0^{+\infty} \gamma e^{-\gamma s} s^{2/\beta} ds = \frac{\mu^{2/\beta} A^2}{\pi \Gamma(1 + 2/\beta)} \frac{1}{\gamma^{2/\beta}} \Gamma(1 + 2/\beta) = \left(\frac{\mu}{\gamma}\right)^{2/\beta} \frac{A^2}{\pi}. \quad (3.18)$$

Lo cual prueba el siguiente resultado:

Proposición 3.3.1. *En las hipótesis de esta sección y si $1/\gamma = M_0$ se cumple que*

$$\lim_{\lambda \rightarrow +\infty} \frac{\lambda \widehat{p}_0^{\text{ext}}}{\lambda p_0^{\text{ext}}} = \Gamma(1 + 2/\beta)$$

■

Observación 3.3.1. Tiene sentido pedir la hipótesis $1/\gamma = M_0$ pues esto es equivalente a comparar el proceso determinista con el caso en que el valor medio de el umbral aleatorio M es M_0 .

Para el caso aditivo, supondremos primero que cuando el umbral S es aleatorio, distribuye como $\text{Exp}(\gamma')$. De esta manera, utilizando la proposición (3.2.3), podemos obtener la forma de \mathcal{L}_G y calcular en este caso particular:

$$\mathcal{K}(\gamma') = \frac{2\pi}{\beta A^2} \left(\frac{\gamma'}{\mu}\right)^{2/\beta} \Gamma(2/\beta) \Gamma(1 - 2/\beta),$$

para concluir entonces que:

$$\lim_{\lambda \rightarrow +\infty} \lambda \widehat{p}_0^{\text{add}} = \frac{A^2}{\pi} \left(\frac{\mu}{\gamma'}\right)^{2/\beta} \frac{1}{\Gamma(2/\beta + 1) \Gamma(1 - 2/\beta)}. \quad (3.19)$$

Si quisiéramos hacer el mismo tratamiento con p_0^{add} , nos encontramos con el problema que en general no conocemos la distribución de $S^t(0)$ y no podemos hallar una fórmula para la intensidad de Φ_{add} . Sin embargo, $\beta = 4$ es un caso particular en que usando la proposición (3.2.1) y el cálculo de $\mathcal{K}(s)$ hecho más arriba, si se llega a una expresión cerrada:

$$p_0^{\text{add}} = \text{erfc}(a) + \frac{1 - e^{-a^2}}{a\sqrt{\pi}} \quad \text{donde } a = \frac{\lambda\pi^2}{4A^2\sqrt{S_0\mu}} \text{ y } \text{erfc}(a) = 1 - \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^a e^{-t^2} dt.$$

En consecuencia:

$$\lim_{\lambda \rightarrow +\infty} \lambda p_0^{\text{add}} = \frac{4A^2}{\pi^2} \sqrt{\frac{S_0\mu}{\pi}}. \quad (3.20)$$

Juntando toda esta información, estamos en condiciones de enunciar la siguiente proposición:

Proposición 3.3.2. *En las hipótesis de esta sección, si $1/\gamma' = S_0$ y además $\beta = 4$ se cumple que*

$$\lim_{\lambda \rightarrow +\infty} \frac{\lambda \widehat{p}_0^{\text{add}}}{\lambda p_0^{\text{add}}} = \frac{\sqrt{\pi}}{2} = \Gamma(1 + 1/2).$$

■

Observación 3.3.2. Observemos que obtuvimos un resultado análogo al de la proposición (3.3.1), pero solo en el caso $\beta = 4$. Es razonable conjeturar entonces que $\forall \beta > 2$ se cumple que:

$$\lim_{\lambda \rightarrow +\infty} \frac{\lambda \widehat{p}_0^{\text{add}}}{\lambda p_0^{\text{add}}} = \Gamma(1 + 1/\beta).$$

Este resultado ha sido verificado mediante simulaciones en [7].

Extremal versus Aditivo y resumen final

Finalmente, para terminar de comparar todos los protocolos, una aplicación directa de las ecuaciones (3.17), (3.18), (3.19) y (3.20) prueba que:

Proposición 3.3.3. *Bajo las hipótesis de esta sección, supongamos que :*

- M_0 y S_0 son los umbrales deterministas de Φ_{ext} y Φ_{add} respectivamente
- M y S son los umbrales aleatorios de Φ_{ext} y Φ_{add} que distribuyen como $\text{Exp}(\gamma)$ y $\text{Exp}(\gamma')$ respectivamente.

Entonces:

$$1) \lim_{\lambda \rightarrow +\infty} \frac{\lambda \widehat{p}_0^{\text{add}}}{\lambda p_0^{\text{ext}}} = \left(\frac{1}{\gamma' M_0} \right)^{2/\beta} \frac{1}{\Gamma(1 - 2/\beta)}$$

$$2) \lim_{\lambda \rightarrow +\infty} \frac{\lambda \widehat{p}_0^{\text{add}}}{\lambda \widehat{p}_0^{\text{ext}}} = \left(\frac{\gamma'}{\gamma} \right)^{2/\beta} \frac{1}{\Gamma(1 + 2/\beta)\Gamma(1 - 2/\beta)}$$

$$3) \text{ Si } \beta = 4, \lim_{\lambda \rightarrow +\infty} \frac{\lambda p_0^{\text{add}}}{\lambda p_0^{\text{ext}}} = \left(\frac{S_0}{M_0} \right)^{2/\beta} \frac{2}{\pi} = \left(\frac{S_0}{M_0} \right)^{2/\beta} \frac{1}{\Gamma(1 + 2/\beta)\Gamma(1 - 2/\beta)}$$

$$4) \text{ Si } \beta = 4, \lim_{\lambda \rightarrow +\infty} \frac{\lambda p_0^{\text{add}}}{\lambda \widehat{p}_0^{\text{ext}}} = (\gamma S_0)^{2/\beta} \frac{4}{\pi\sqrt{\pi}} = (\gamma S_0)^{2/\beta} \frac{1}{(\Gamma(1 + 2/\beta))^2 \Gamma(1 - 2/\beta)}$$

■

Observación 3.3.3. Nuevamente, las relaciones **3)** y **4)** solo pueden probarse para un β particular, pero podemos conjeturar que se extienden para todo β mayor a 2 de la forma en que lo escribimos en el enunciado de la proposición anterior.

Observación 3.3.4. Notemos que las relaciones presentadas nos permite determinar qué relación debe existir entre dos parámetros de dos protocolos distintos para que ambos tengan la misma intensidad asintótica. Por ejemplo: para Φ_{ext} y Φ_{add} con umbrales deterministas debe cumplirse que $S_0 = M_0 (\Gamma(1 + 2/\beta)\Gamma(1 - 2/\beta))^{\beta/2}$.

A modo de resumen final, presentamos aquí los resultados obtenidos:

Teorema 3.3.1. *Bajo las hipótesis de esta sección, suponiendo $M_0 = S_0 = 1/\gamma = 1/\gamma'$ y asumiendo las conjeturas de las observaciones (3.3.2) y (3.3.3), se cumple que:*

$$\lim_{\lambda \rightarrow +\infty} \frac{\lambda \widehat{p}_0^{ext}}{\lambda p_0^{ext}} = \lim_{\lambda \rightarrow +\infty} \frac{\lambda \widehat{p}_0^{add}}{\lambda p_0^{add}} = \Gamma(1 + 1/\beta)$$

$$\lim_{\lambda \rightarrow +\infty} \frac{\lambda \widehat{p}_0^{add}}{\lambda p_0^{ext}} = \frac{1}{\Gamma(1 - 2/\beta)}$$

$$\lim_{\lambda \rightarrow +\infty} \frac{\lambda \widehat{p}_0^{add}}{\lambda \widehat{p}_0^{ext}} = \lim_{\lambda \rightarrow +\infty} \frac{\lambda p_0^{add}}{\lambda p_0^{ext}} = \frac{1}{\Gamma(1 + 2/\beta)\Gamma(1 - 2/\beta)}$$

$$\lim_{\lambda \rightarrow +\infty} \frac{\lambda p_0^{add}}{\lambda \widehat{p}_0^{ext}} = \frac{1}{(\Gamma(1 + 2/\beta))^2 \Gamma(1 - 2/\beta)}$$

■

Observemos que todas las relaciones que obtuvimos dependen solamente de β , que es el parámetro de la función de pérdida l . Es decir: β es una medida de la influencia de los nodos lejanos en un punto.

Los siguientes gráficos nos permiten comparar visualmente las intensidades asintóticas en función de β . En la teoría, todas ellas tienden a 1 cuando β tiende a $+\infty$ pues para valores de β más grandes, los nodos lejanos tienen menos influencia e importan más los cercanos, por lo que los protocolos con shot-noise aditivo y extremal se parecen. En la práctica, tiene sentido considerar valores de β menores a 4.

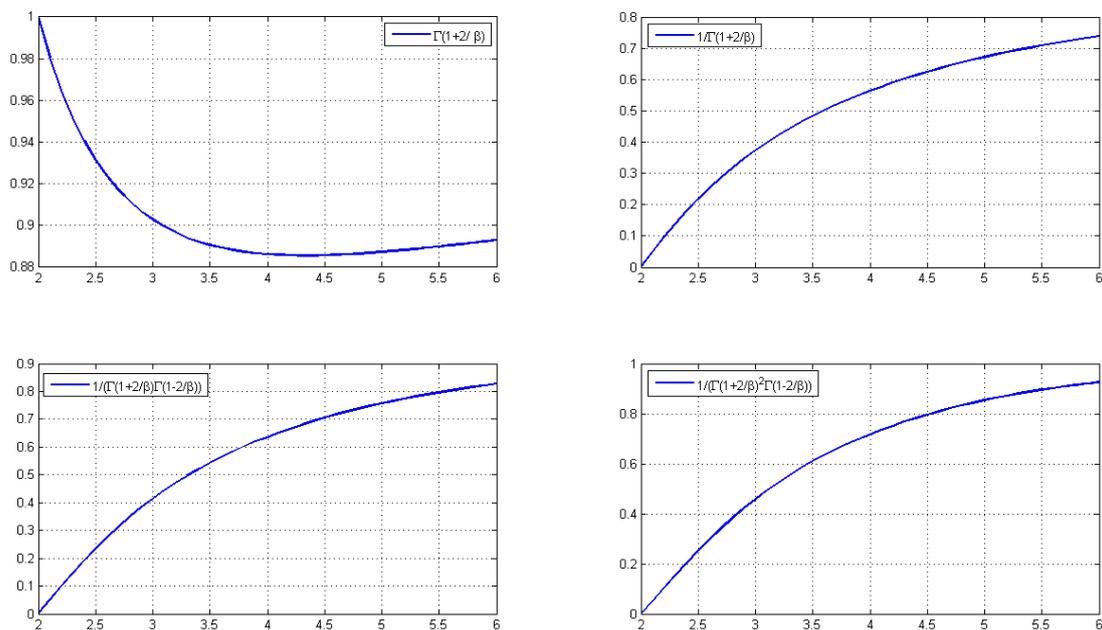


Figura 3.2: Gráficos de las funciones que dan las relaciones entre las intensidades asintóticas

Bibliografía

- [1] François Baccelli y Bartolomiej Blaszczyszyn. *Stochastic Geometry and Wireless Networks. Volume I: Theory*. INRIA & Ecole Normale Supérieure, 45 rue d'Ulm, Paris, Francia (2009).
- [2] François Baccelli y Bartolomiej Blaszczyszyn. *Stochastic Geometry and Wireless Networks. Volume II: Applications*. INRIA & Ecole Normale Supérieure, 45 rue d'Ulm, Paris, Francia (2009).
- [3] Dietrich Stoyan, Wilfrid S. Kendall y Joseph Mecke. *Stochastic Geometry and its applications, Second Edition*. John Wiley & Sons Ltd, Baffins Lane, West Sussex, Inglaterra (1995).
- [4] D.J. Daley y D. Vere-Jones. *An Introduction to the Theory of Point Processes*. Springer-Verlag New York Inc (1988).
- [5] D. R. Cox y P.A.W. Lewis. *The Statistical Analysis of Series of Events*. Spottiswoode, Ballantyne & Co. Ltd., Gran Bretaña (1966).
- [6] Dietrich Stoyan y Helga Stoyan de Freiberg. *On One of Matérn's Hard-Core Point Process Models*. Math. Nachr. 122 (1985).
- [7] François Baccelli y Paola Bermolen. *Extremal versus Additiva Matérn Point Processes*
- [8] Martin Haenggi, Jeffrey G. Andrews, François Baccelli, Olivier Dousse y Massimo Franceschetti. *Stochastic Geometry and Random Graphs for the Analysis and Design of Wireless Networks*.
- [9] Adrian Baddeley. *Analysing spatial point patterns in R*. CSIRO and University of Western Australia (2010).