CÁLCULO 3 - 2012
EXAMEN FEBRERO

18 DE FEBRERO DE 2013

(1) Hallar el flujo del campo vectorial

$$X = (\sin^3(z+y), e^{x^2-z}, y^2)$$

a través de la superficie S donde

$$S = \{(x,y,z) : z = x^2 + y^2 \quad \text{con} \quad z \in [0,3]\}$$

orientada de manera que la normal tiene tercer componente negativa.

Observar que $\operatorname{div}(X) = 0$.

Entonces si tapamos la superficie S con $D = \{(x,y,z); x^2+y^2 \leq 3,\ z = 3\}$ obtenemos una superficie cerrada a la cual podemos aplicar el Teorema de Gauss ya que X está definido en todo $\mathbb{R}^3$.

Si llamamos $\bar{S}$ a $S \cup D$, tenemos que la normal exterior a $\bar{S}$ coincide, cuando restringida a S, con la normal de S que apunta para abajo (tercer componente negativa).

Entonces, como la divergencia es 0, obtenemos que

$$0 = \iint_{\bar{S}} X dS = \iint_S X dS + \iint_D X dS$$

D orientada con normal $(0,0,1)$.

De lo anterior se deduce que

$$\iint_S X dS = -\iint_D X dS = -\iint_D y^2 dS$$

Parametrizando D con $\varphi(r,\theta) = (r\cos\theta, r\sin\theta, 3)$ con $0 \leq r \leq \sqrt{3}$ y $0 \leq \theta \leq 2\pi$ obtenemos

$$\iint_S X dS = -\iint_D y^2 dS = -\int_0^{\sqrt{3}} \int_0^{2\pi} r^3 \sin^2\theta dr d\theta = -\frac{9}{4}\pi$$

(2) Sea S una superficie definida como la gráfica de una función $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, de clase C^1, sobre la región D en el plano xy, orientada con normal apuntando hacia arriba. Sea $F(x,y,z) = (0,0,1)$ para todo $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$. Probar que el flujo de F a través de S no depende de g.

Parametrizando S con $\varphi(x,y) = (x,y,g(x,y))$ con $(x,y) \in D$ tenemos que

$$\varphi_x = (1,0,g_x)$$
$$\varphi_y = (0,1,g_y$$

Entonces

$$\varphi_x \wedge \varphi_y = (-g_x, -g_y, 1)$$

Finalmente

$$\iint_S F dS = \iint_D F(x,y,g(x,y).\varphi_x \wedge \varphi_y dxdy = \iint_D 1 dxdy = Área(D)$$

que no depende de g.

(3) Calcular $\int_{\mathcal{C}} X d\vec{r}$, donde $X = (z^3, x^3, -y^3)$ y $\mathcal{C}$ es la curva dada por la intersección de las superficies $x^2+y^2 = z$ y el cilindro $x^2+y^2 = x$, cuya proyección sobre el plano XY está orientada positivamente. Sugerencia: aplicar el Teorema de Stokes

Hay una forma totalmente directa de calcular la integral solicitada que parametrizando la porción de paraboloide encerrado por $\mathcal{C}$ y calcular el flujo del rotor. Hay que hacer un poco más de cuentas pero arriban el mismo resultado.

La forma de calcularla que vamos a presentar parte de la base de que si la curva está simultáneamente en $x^2+y^2 = z$ y $x^2+y^2 = x$ esto significa que todos sus puntos satisfacen la ecuación $x = z$, en otras palabras $\mathcal{C}$ está contenida en el plano de ecuación $x = z$.

$\mathcal{C}$, que está contenida en el cilindro de ecuación $x^2+y^2 = x$, se proyecta sobre la circunferencia base del cilindro que es la de centro $(\frac{1}{2}, 0)$ y radio $\frac{1}{2}$ ya que la ecuación $x^2+y^2 = x$ se puede escribir como $(x-\frac{1}{2})^2+y^2 = \frac{1}{4}$. Parametrizamos la región del plano $x = z$, que llamamos D, encerrada por $\mathcal{C}$ de la manera siguiente

$$\varphi(r,\theta) = (\frac{1}{2}+r\cos\theta, r\sin\theta, \frac{1}{2}+r\cos\theta)$$

con $0 \le r \le \frac{1}{2}$ y $0 \le \theta \le 2\pi$.

Entonces,

$$\varphi_r = (\cos\theta, \sin\theta, \cos\theta)$$
$$\varphi_\theta = (-r\sin\theta, r\cos\theta, -r\sin\theta)$$

de donde

$$\varphi_r \wedge \varphi_\theta = (-r, 0, r)$$

(observen que, como debe ser, $\varphi_r \wedge \varphi_\theta$ es un vector normal al plano $x = z$)

Por otro lado, el rotor de X es igual a $(-3y^2, 3z^2, 3x^2)$.

Finalmente, aplicando el Teorema de Stokes obtenemos

$$\int_{\mathcal{C}} X ds = \iint_D \nabla \wedge X dS = 3\int_0^{\frac{1}{2}}\int_0^{2\pi} r(r\sin\theta)^2 + r(\frac{1}{2}+r\cos\theta)^2 d\theta dr =$$
$$= 3\int_0^{\frac{1}{2}}\int_0^{2\pi} r^3 + \frac{r}{4} + r^2\cos\theta = 6\pi(\frac{1}{64}+\frac{1}{32}) = \frac{9}{32}\pi$$