CÁLCULO 3 - 2012
SOLUCIONES DEL EXAMEN DE DICIEMBRE

7 DE DICIEMBRE DE 2012

(1) Sean los campos $F(x, y, z) = \big(e^x yz, e^x z + 2yz, e^x y + y^2 + 1\big)$ y $G(x, y, z) = (y, x, y)$.
Determine si F y/o G tienen un potencial escalar. Justifique su respuesta y en cada caso afirmativo halle un potencial.

Ambos campos están definidos en todo R^3 entonces tienen potencial escalar si y solo si su rotor es nulo. Haciendo el cálculo correspondiente se ve que el rotor de F es nulo y el de G es $(1, 0, 0)$. Por lo tanto solo F tiene potencial escalar.

Hallemos el potencial de f de F. Para ello obtenemos las siguientes ecuaciones:
(a) $f_x = F_1 = e^x yz$
(b) $f_y = F_2 = e^x z + 2yz$
(c) $f_z = F_3 = e^x y + y^2 + 1$
De la primera obtenemos que

$$f(x, y, z) = e^x yz + k(y, z)$$

donde k es una función a determinar que no depende de x.

De la tercera obtenemos que

$$f(x, y, z) = e^x yz + y^2 z + z + h(x, y)$$

donde h es una función a determinar que no depende de z.

Igualando estas dos expresiones tenemos que $k(y, z) = y^2 z + z + h(x, y)$ vemos que, en principio, h solo depende de y. Pero la derivada de la segunda expresión de f respecto a y ya da igual a F_2. Así que h tampoco depende de y. Entonces, concluimos que $f = e^x yz + y^2 z + z$ es un potencial escalar para F como se puede comprobar directamente.

(2) Sea S una superficie que corresponde a la parte de la esfera $x^2 + y^2 + z^2 = 4$ que queda fuera del cilindro $x^2 + y^2 = 1$.
(a) Calcule el flujo del campo $F(x, y, z) = (y, -x, z)$ a través de S orientada con la normal saliente a la esfera.
(b) Demuestre que el flujo de F a través de cualquier parte del cilindro es 0.
(c) Use el teorema de la divergencia para calcular el volumen de la región encerrada entre S y el cilindro.

Parte a)

Comenzamos por dar una parametrización de S.

$$P(\theta, \varphi) = 2(\cos\theta \cos\phi, \sin\theta \cos\varphi, \sin\phi)$$

θ varía antre 0 y 2π. Para determinar en dónde varía φ observamos que como el radio del cilindro es 1 y el de la esfera es 2 el ángulo máximo que alcanza φ tiene coseno $1/2$. Se concluye que φ varía entre $(-\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{3})$.

También es fácil observar que la parametrizción P está orientada coherentemente con la normal saliente. Para ello tenemos que:

$$P_\theta = 2(-\sin\theta\cos\varphi, \cos\theta\cos\varphi, 0)$$
$$P_\varphi = 2(-\cos\theta\sin\varphi, -\sin\theta\sin\varphi, \cos\varphi)$$

Hay que hacer el cálculo de la normal saliente a S (que es $1/2(x,y,z)$) producto escalar con $P_\theta \wedge P_\varphi$ y ver que da positivo (da $4\cos\varphi$ lo cual es positivo en el dominio en que estamos trabajando)

Entonces estamos listos para calcular el flujo.

$$\iint_S F.\mathbf{n}dS = 4\int_{-\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{3}}\int_0^{2\pi}(\sin\theta\cos\varphi, -\cos\theta\cos\varphi, \sin\varphi).(\cos\theta\cos^2\varphi, \sin\theta\cos^2\varphi, \sin\varphi\cos\varphi)d\theta d\varphi =$$
$$= 4\int_{-\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{3}}\int_0^{2\pi}\sin^2\varphi\cos\varphi d\theta d\varphi = \frac{8}{3}\sin^3\varphi|_{-\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{3}} = 2\sqrt{3}\pi$$

Parte b)

Una normal al cilindro por un punto (x,y,z) es $\mathbf{n} = (x,y,0)$ (observen que además este vector tiene norma 1) Entonces, $F.\mathbf{n} = (y,-x,z).(x,y,0) = 0$. Esto claramente implica que el flujo es 0 (independientemente de la orientación que solo cambiaría el signo)

Parte c)

Estamos en condiciones de aplicar el teorema de la divergencia. Llamemos $\tilde{S}$ a la superficie que est formada por S la región del cilindro que encierran el volumen que queremos calcular. Por un lado tenemos que:

$$\iint_{\tilde{S}} F.\mathbf{n}dS = \iiint_D \operatorname{div}(F)dV = \iiint_D 1dV = \operatorname{vol}(D)$$

(observen que la divergencia de F es 1)

Por otro lado:

$$\iint_{\tilde{S}} F.\mathbf{n}dS = \iint_S F.\mathbf{n}dS + \iint_C F.\mathbf{n}dS = 2\sqrt{3}\pi$$

donde C es la porción de cilindro utilizada para cerrar la región.

En conclusión,

$$\operatorname{vol}(D) = 2\sqrt{3}\pi$$

(3) Sea I el flujo de $X(x,y,z) = (e^y, 2xe^{x^2}, z^2)$ a través de la semiesfera superior S de radio 1.
  (a) Sea $Y(x,y,z) = (e^y, 2xe^{x^2}, 0)$. Pruebe que Y tiene un potencial vector y halle uno de la forma $A = (0,0,h(x,y))$.
  (b) Calcule el flujo de Y a través de S.
  (c) Calcule I (sugerencia: use la parte anterior)

Parte a) La divergencia de Y que es un campo definido en todo el espacio es nula por lo cual, tiene potencial vector.

$\operatorname{rot}(A) = (h_y, -h_x, 0)$ de donde obtenemos que $h_y = e^y$ y $h_x = -2xe^{x^2}$. Entonces, $h = e^y + k(x)$ y $h = -e^{x^2} + l(y)$ donde k y l son funciones que dependen solo de x y de y respectivamente.

Parte b)

Por el teorema de Stokes, el flujo de Y a través de S es igual a la circulacin de A a lo largo de ∂S. Pero A es ortogonal al plano que contiene a ∂S lo cual implica que es ortogonal a su vector tangente en todo punto. Por lo tanto, la circulación de A es 0 y lo mismo ocurre con el flujo a vés de S.

Parte c)

El campo $X = Y + (0,0,z^2)$. Por lo tanto, su flujo es igual a la suma de los flujos de los campos sumandos. Ya sabemos que el flujo de Y es cero por la parte anterior y entonces solo resta calcular el flujo de $(0,0,z^2)$.

Comenzamos por dar una parametrización de S.

$$P(\theta,\varphi) = (\cos\theta\cos\phi, \sin\theta\cos\varphi, \sin\phi)$$

θ varía antre 0 y 2π y φ entre 0 y $\frac{\pi}{2}$.

Calculando obtenemos que

$$P_\theta = (-\sin\theta\cos\varphi, \cos\theta\cos\varphi, 0)$$
$$P_\varphi = (-\cos\theta\sin\varphi, -\sin\theta\sin\varphi, \cos\varphi)$$

y

$$P_\theta \wedge P_\varphi = (\cos\theta\cos^2\varphi, \sin\theta\cos^2\varphi, \sin\varphi\cos\varphi)$$

Entonces

$$\iint_S (0,0,z^2).\mathbf{n}dS = \int_0^{\frac{\pi}{2}}\int_0^{2\pi}(0,0,\sin^2\varphi).(\cos\theta\cos^2\varphi, \sin\theta\cos^2\varphi, \sin\varphi\cos\varphi)d\theta d\varphi =$$
$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}}\int_0^{2\pi}\sin^3\varphi\cos\varphi d\theta d\varphi = 2\pi\frac{\sin^4\varphi}{4}|_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi}{2}$$