CURVATURA CONSTANTE EN EL PLANO

A propósito del ejercicio 1 del M.O. del parcial de mayo de 2016, dejo aquí una prueba de porqué torsión nula y curvatura constante implican circunferencia. Por simplicidad, consideraremos la curva parametrizada por longitud de arco.

Proposición 0.1 *Sea C una curva parametrizada por $\alpha : \alpha(s)$ por longitud de arco de modo que $\forall s : \tau(s) = 0$ y $\kappa(s) = k \neq 0 \Longrightarrow C$ está contenida en una circunferencia.*

demostración:
De las hipótesis y las fórmulas de Frenet obtenemos que $t'(s) = k.n(s)$ y $n'(s) = -k.t(s)$ de lo que deducimos que $t''(s) = -k^2.t(s)$ que es equivalente a $\alpha'''(s) = -k^2.\alpha'(s)$
Integrando según s obtenemos $\int_0^x \alpha'''(s).ds = -k^2. \int_0^x \alpha'(s).ds$ que da como resultado $\alpha''(x) - \alpha''(0) = -k^2.(\alpha(x) - \alpha(0))$ por lo que $\alpha''(x) = -k^2.\alpha(x) + k^2.\alpha(0) + \alpha''(0)$.
Llamando K al punto fijo $k^2.\alpha(0) + \alpha''(0)$ y utilizando que $\forall x : k.n(x) = \alpha''(x) \Longrightarrow k.n(x) = -k^2.\alpha(x) + K$. Dividiendo entre k^2 y tomando normas deducimos que existe un punto fijo p en $\mathbb{R}^3$ tal que $\forall x : \|\alpha(x) - p\| = \frac{1}{k}$ por lo que la curva está contenida en una esfera S.
Utilizando nuevamente que la torsión es nula podemos asegurar que C está en la intersección de S con cierto plano π. Si consideramos p' la proyección de p sobre π, es inmediato ver que todo punto de la intersección equidista de p' con magnitud $\sqrt{(\frac{1}{k})^2 - \|p - p'\|^2}$ (basta aplicar el teorema de Pitágoras) por lo que está en una circunferencia.
Esto finaliza la prueba.

Juan C. Morelli - I.M.E.R.L.