Cálculo 3

Primer Parcial del curso 2010

28 de abril de 2010.

N. de Parcial | Apellido y Nombre | Cédula de Identidad

Puntaje (no llenar)

1	2a	2b	3a	3b	3c	3d	4

1. Sea la curva C dada por la intersección de las superficies:

$$z = xy$$

y $x^2 - y^2 = 1$, con $x \in \left[1, \frac{e+e^{-1}}{2}\right]$, orientada de modo que el punto inicial sea $(1,0,0)$. Sea el campo $F(x,y,z) = (y, -x, 1)$. La circulación del campo F sobre C es:

2. Consideremos un móvil que describe una trayectoria dada por

$$\gamma(t) = (4\cos(\pi t), 4sen(\pi t)), \qquad t \in [0,1]$$

sobre el que actúan dos fuerzas F_1 y F_2 dadas por

$$F_1(x,y) = \left(\frac{-y}{(x^2+y^2)^{3/2}}, \frac{x}{(x^2+y^2)^{3/2}}\right),$$

$$F_2(x,y) = \left(2xy, x^2+2y\right).$$

a) El trabajo realizado por F_1 es:

b) El trabajo realizado por F_2 es:

3. Sea S la siguiente superficie, $S = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : z^2 = x^2+y^2,\ 0 \leq z < 2\}$.

a) Encuentre una parametrización $P(u,v)$ diferenciable, inyectiva y regular de $S - \{0,0,0\}$.

$P(u,v) =$

b) Halle la ecuación del plano tangente a S en el punto $(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2})$.

c) Sea C la curva que resulta de la intersección de S con la superficie $z = \frac{1}{2}$, orientada con sentido antihorario mirada desde arriba. Halle parametrización γ de C $\boxed{}$

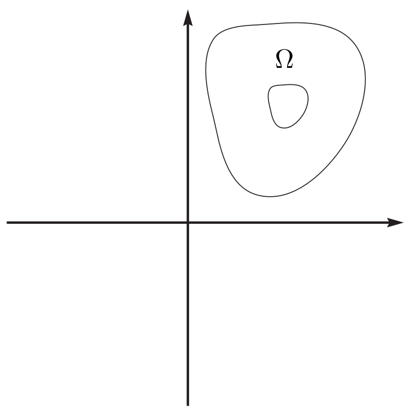
d) Encuentre el versor tangente $\overrightarrow{t}$, el versor normal $\overrightarrow{n}$ y el binormal $\overrightarrow{b}$ a la curva C en el punto $(\frac{1}{2\sqrt{2}}, -\frac{1}{2\sqrt{2}}, \frac{1}{2})$.

$\boxed{\overrightarrow{t} = }$

$\boxed{\overrightarrow{n} = }$

$\boxed{\overrightarrow{b} = }$

4. Sea Ω la región de la figura y $\mathcal{C}_1$ y $\mathcal{C}_2$ las curvas borde orientadas como en el dibujo. Hallar la circulación en $\mathcal{C}_1 \cup \mathcal{C}_2$ del campo $F(x, y) = (4y + x^2 + 5, 2x - \ e^y)$ sabiendo que el área de la región Ω es $3\pi/2$. $\boxed{}$



5. *a*) Sea $F : \Omega \to \mathbb{R}^3$ un campo vectorial de clase C^1 y $f : \Omega \to \mathbb{R}$ un campo escalar tal que $\nabla f = F$. Si $P, Q \in \Omega$ son dos puntos y $\mathcal{C} \subset \Omega$ es una curva que empieza en P y termina en Q demostrar que

$$\int_{\mathcal{C}} F\, d\alpha = f(Q) - f(P)$$

b) Deducir que si F es de gradientes entonces es conservativo (i.e. la circulación sobre cualquier curva cerrada es nula).

c) Decidir si los campos F_1 y F_2 del ejercicio 2 son campos de gradientes. En caso afirmativo hallar un potencial y en caso negativo justificar.

d) Hallar $\int_{\mathcal{C}} F_2\, d\alpha$, donde $\mathcal{C}$ es la curva parametrizada por $\alpha : [0, \pi/2] \to \mathbb{R}^2$ con $\alpha(t) = (e^t \cos t, \operatorname{sen} t \cos t)$

Cálculo 3

Primer Parcial del curso 2010

28 de abril de 2010.

N. de Parcial | Apellido y Nombre | Cédula de Identidad

Respuestas correctas.

1. Sea la curva C dada por la intersección de las superficies:

$$z = xy$$

y $x^2 - y^2 = 1$, con $x \in \left[1, \frac{e+e^{-1}}{2}\right]$, orientada de modo que el punto inicial sea $(1, 0, 0)$. Sea el campo $F(x, y, z) = (y, -x, 1)$. La circulación del campo F sobre C es:

$$\boxed{\frac{1}{4}(e^2 - e^{-2}) - 1 = \frac{\operatorname{senh}(2)}{2} - 1 = \operatorname{senh}(1)\cosh(1) - 1}$$

2. Consideremos un móvil que describe una trayectoria dada por

$$\gamma(t) = (4\cos(\pi t), 4sen(\pi t)), \qquad t \in [0, 1]$$

sobre el que actúan dos fuerzas F_1 y F_2 dadas por

$$F_1(x, y) = \left(\frac{-y}{(x^2 + y^2)^{3/2}}, \frac{x}{(x^2 + y^2)^{3/2}}\right),$$

$$F_2(x, y) = \left(2xy, x^2 + 2y\right).$$

   a) El trabajo realizado por F_1 es: $\boxed{\pi/4}$

   b) El trabajo realizado por F_2 es: $\boxed{0}$

3. Sea S la siguiente superficie, $S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : z^2 = x^2 + y^2,\ 0 \leq z < 2\}$.

   a) Encuentre una parametrización $P(u, v)$ diferenciable, inyectiva y regular de $S - \{0, 0, 0\}$.

   $\boxed{P(u, v) = (u, v, \sqrt{u^2 + v^2}), \text{ con } 0 < \|(u, v)\| < 2 \quad)}$

   o alternativamente

   $\boxed{P(\rho, \theta) = (\rho\cos\theta, \rho\operatorname{sen}\theta, \rho), \text{ con } \rho \in (0, 2),\ \theta \in (0, 2\pi))}$.

   b) Halle la ecuación del plano tangente a S en el punto $(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2})$.

   $\boxed{-x - y + \sqrt{2}z = 0}$

c) Sea C la curva que resulta de la intersección de S con la superficie $z = \frac{1}{2}$, orientada con sentido antihorario mirada desde arriba. Halle parametrización γ de C $\boxed{\gamma(t) = \frac{1}{2}(\cos t, \operatorname{sen} t, 1)\ t \in [0, 2\pi]}$

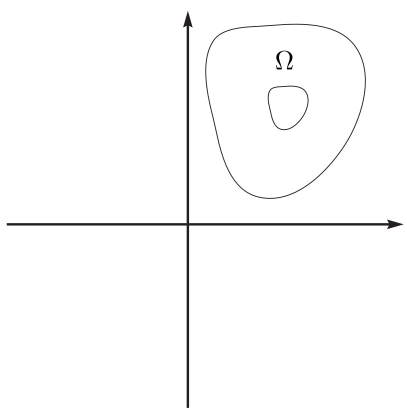
d) Encuentre el versor tangente $\overrightarrow{t}$, el versor normal $\overrightarrow{n}$ y el binormal $\overrightarrow{b}$ a la curva C en el punto $(\frac{1}{2\sqrt{2}}, -\frac{1}{2\sqrt{2}}, \frac{1}{2})$.

$$\boxed{\overrightarrow{t} = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}, 0\right)}$$

$$\boxed{\overrightarrow{n} = \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}, 0\right)}$$

$$\boxed{\overrightarrow{b} = (0, 0, 1)}$$

4. Sea Ω la región de la figura y $\mathcal{C}_1$ y $\mathcal{C}_2$ las curvas borde orientadas como en el dibujo. Hallar la circulación en $\mathcal{C}_1 \cup \mathcal{C}_2$ del campo $F(x, y) = (4y + x^2 + 5, 2x - e^y)$ sabiendo que el área de la región Ω es $3\pi/2$. $\boxed{-3\pi}$



5. a) Sea $F : \Omega \to \mathbb{R}^3$ un campo vectorial de clase C^1 y $f : \Omega \to \mathbb{R}$ un campo escalar tal que $\nabla f = F$. Si $P, Q \in \Omega$ son dos puntos y $\mathcal{C} \subset \Omega$ es una curva que empieza en P y termina en Q demostrar que

$$\int_{\mathcal{C}} F\, d\alpha = f(Q) - f(P)$$

VER TEORICO.

b) Deducir que si F es de gradientes entonces es conservativo (i.e. la circulación sobre cualquier curva cerrada es nula).
VER TEORICO.

c) Decidir si los campos F_1 y F_2 del ejercicio 2 son campos de gradientes. En caso afirmativo hallar un potencial y en caso negativo justificar.

- F_1 no es de gradientes pues por cálculo directo se comprueba que la circulación sobre la cfa (curva cerrada simple) de centro el origen y radio 4 es $\pi/2 \neq 0$.
- F_2 es de gradientes, un potencial es $f(x,y) = x^2y + y^2$.

d) Hallar $\displaystyle\int_{\mathcal{C}} F_2\, d\alpha$, donde $\mathcal{C}$ es la curva parametrizada por $\alpha : [0, \pi/2] \to \mathbb{R}^2$ con $\alpha(t) = (e^t \cos t, \operatorname{sen} t \cos t)$

Como α tiene extremos $(0,0)$ y $(1,0)$ se verifica que:

$$\int_{\mathcal{C}} F_2\, d\alpha = f(0,0) - f(1,0) = 0$$

siendo f el potencial determinado en la parte anterior.