Solución Ejercicio 12 - Práctico 1

Sea $\alpha(t)$ una curva parametrizada por un parámetro cualquiera y sea $\alpha(s)$ la reparametrización por longitud de arco. Del ejercicio 11 se sabe que la curvatura esta dada mediante $k(s) = \left\|\frac{\partial T}{\partial s}\right\|$.
La idea es encontrar una expresión para $\frac{\partial T}{\partial s}$ en función del parámetro t. Usando la regla de la cadena se tiene que:

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \frac{\partial T}{\partial s}\frac{\partial s}{\partial t}$$

Aquí $s(t) = \int_a^t \left\|\frac{\partial \alpha(\tau)}{\partial \tau}\right\| d\tau$, en particular $\frac{\partial s}{\partial t} = \left\|\frac{\partial \alpha(t)}{\partial t}\right\|$. Luego:

$$\frac{\partial T}{\partial s} = \frac{1}{\left\|\frac{\partial \alpha(t)}{\partial t}\right\|}\frac{\partial T}{\partial t}$$

es decir:

$$k(t) = \left\|\frac{\frac{\partial T}{\partial t}}{\left\|\frac{\partial \alpha(t)}{\partial t}\right\|}\right\|$$

De aquí en más vamos a denotar $\frac{\partial \alpha(t)}{\partial t}$ como $\alpha'(t)$

Como $T(t) = \frac{\alpha'(t)}{\|\alpha'(t)\|}$ se tiene que;

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \frac{1}{\|\alpha'(t)\|^2}\left[\alpha''(t)\left\|\alpha'(t)\right\| - \frac{\alpha'(t)}{\|\alpha'(t)\|} < \alpha''(t), \alpha'(t) >\right]$$

Entonces:

$$\frac{\partial T}{\partial s} = \frac{1}{\|\alpha'(t)\|^2}\left[\alpha''(t) - T(t) < \alpha''(t), T(t) >\right]$$

Es un cuenta ver que $\|\alpha''(t) - T(t) < \alpha''(t), T(t) >\| = \|\alpha''(t) \wedge T(t)\|$, de esto último se obtiene lo deseado.