Universidad de la República **8 de mayo de 2013**

Facultad de Ingeniería-IMERL

PRIMER PARCIAL: CALCULO III

N de parcial	Cédula	Apellido y nombre	Salón

RESPUESTAS				
1	2	3	4	5

Múltiple opción (Total: 25 puntos)

En cada pregunta hay sólo una opción correcta.

Respuesta correcta: 5 puntos, respuesta incorrecta: -1 punto, no respuesta: 0 punto.

Ejercicio 1

Se consideran las curvas diferenciables $\gamma_1(t) = \frac{1}{2}(\cos t, \sin t, t)$, $\gamma_2(t) = (t^3, 3t^3 - t, 5 - t)$, y $\gamma_3(t) = (e^t, cosh(t), 0)$.

(A) γ_3 está parametrizada por longitud de arco.

(B) γ_1 está paramerizada por longitud de arco y la torsión de γ_2 es distinta de cero.

(C) γ_2 y γ_3 tienen torsión cero y γ_1 no está parametrizada por longitud de arco.

(D) γ_3 tiene torsión cero pero γ_2 tiene torsión distinta de cero.

(E) Ninguna de las anteriores.

Ejercicio 2

Dado el campo $X : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, se sabe que es irrotacional y que $X(t, 0) = (2t + 1, 1)$ para todo $t \in \mathbb{R}$, y la curva $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \ x^2 + y^2 = 1, \ y \geq 0\}$ recorrida en sentido antihorario. Entonces $\int_C X =$

(A) 2. (B) -2. (C) 0. (D) 4. (E) -4.

Ejercicio3

Se considera la superficie parametrizada por $\varphi(u,v) = ((2+\cos u)\cos v, (2+\cos u)\sin v, \sin u)$ con $0 < u < 2\pi$, $0 < v < 2\pi$.

(A) El plano tangente a la superficie en el punto $(-1,0,0)$ es $z = -1$ y el área de la superficie es $8\pi^2$.

(B) El plano tangente a la superficie en el punto $(-1,0,0)$ es $x = -1$ y el área de la superficie es $4\pi^2$.

(C) El plano tangente a la superficie en el punto $(-1,0,0)$ es $x = -1$ y el área de la superficie es $8\pi^2$.

(D) El plano tangente a la superficie en el punto $(-1,0,0)$ es $z = -1$ y el área de la superficie es $4\pi^2$.

(E) Ninguna de las opciones anteriores es correcta.

Ejercicio 4

Dada la curva parametrizada por $\alpha(t) = (\cos 2\pi t, \sin 2\pi t, t)$ con $t \in [0,1]$.

(A) La curva está incluida en un cilindro y su longitud es $\sqrt{2}$.

(B) La curva está incluida en un cilindro y su longitud es $\sqrt{4\pi^2+1}$.

(C) La curva no está incluida en un cilindro y su longitud es $\sqrt{4\pi^2+1}$.

(D) La curva está incluida en un cilindro y su longitud es $4\pi^2+1$.

(E) La curva no está incluida en un cilindro y su longitud es $\sqrt{2}$.

Ejercicio 5

Sea el campo vectorial $X = \left(2xyze^{x^2}, ze^{x^2}, ye^{x^2}\right)$ y f un potencial escalar de X tal que $f(0,0,0) = 5$. Entonces $f(1,1,2)$ vale:

(A) $2e+5$.

(B) e^4+5.

(C) $2e$.

(D) e^4.

(E) No es posible determinar dicho valor dado que no existe potencial escalar de X.

Universidad de la República **8 de mayo de 2013**

Facultad de Ingeniería-IMERL

PRIMER PARCIAL: CALCULO III

N de parcial	Cédula	Apellido y nombre	Salón

Ejercicio de desarrollo (Total: 15 puntos)

Ejercicio 1

Se considera $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ abierto.

1. Dadas la función $f : \Omega \to \mathbb{R}$ de clase C^1 y una curva $C \subset \Omega$ con origen en A y extremo en B, demostrar que $\int_C \nabla f = f(B) - f(A)$.
2. Dado el campo $X : \Omega \to \mathbb{R}^2$, donde X es continuo sobre Ω abierto. Probar que si X es de gradientes en Ω, entonces $\int_C X = 0$ para toda $C \subset \Omega$ curva cerrada.

Ejercicio 2

1. Dado el campo $Y : \mathbb{R}^2 - \{(0,0)\} \to \mathbb{R}^2$ dado por $Y(x,y) = \left(\frac{x}{x^2+y^2}, \frac{y}{x^2+y^2}\right)$.
   a) Investigar si es de gradientes en $\mathbb{R}^2 - \{(0,0)\}$ y en caso afirmativo hallar un potencial.
   b) Hallar $\int_C Y$ siendo C la poligonal que conecta los puntos $(1,1)$, $(2,3)$, $(3,4)$ y $(5,0)$.
2. Dado el campo $Z : \mathbb{R}^2 - \{(0,0)\} \to \mathbb{R}^2$ dado por $Z(x,y) = \left(\frac{-y}{x^2+y^2}, \frac{x}{x^2+y^2}\right)$.
   a) Investigar si es de gradientes en $\mathbb{R}^2 - \{(0,0)\}$ y en caso afirmativo hallar un potencial.
   b) Hallar $\int_C Z$ siendo C la curva formada por los lados del cuadrado $[0,1] \times [0,1]$ recorrido en sentido horario.
   c) ¿Qué se puede decir sobre la integral del campo Z sobre una curva cerrada que no encierre al origen? Justificar.

Primer parcial de Cálculo 3

Esbozo de la solución

8 de mayo de 2012

1 Ejercicios de Múltiple Opción

- C
- B
- C
- B
- A

2 Ejercicios de desarrollo

1. Ver teórico.
2. 1. a) El campo Y es irrotacional (lo cual se verifica calculando su rotor). Por el teorema de Green, su circulación a lo largo de cualquier curva cerrada que no deje a $(0,0)$ en su interior es cero.
   Sea C la circunferencia de centro en el origen y radio 1. Parametrizándola por $t \mapsto (\cos t, \text{sent})$ un cálculo directo muestra que $\int_C Y \cdot ds = 0$. Siendo Y irrotacional, esto basta para afirmar que la circulación de Y a lo largo de cualquier curva cerrada que encierra al origen es 0.
   Por lo tanto Y es conservativo, lo que es lo mismo que ser de gradientes.
   Hallaremos un potencial $f(x,y)$; concretamente el que vale 0 en el punto $(1,0)$. Consideremos un punto $(x,y) = (r\cos\theta, r\text{sen}\theta)$. Vamos a dar una curva C' que une al punto (x,y) con el $(1,0)$, que será la concatenación de dos curvas C_1 y C_2 definidas del siguiente modo:
   - C_1 está parametrizada por $t \mapsto (\cos t, \text{sen t})$ para $0 \leq t \leq \theta$.
   - C_2 está parametrizada por $t \mapsto (t\cos\theta, t\ sen\ \theta)$ para t entre 1 y r.

   Entonces
   $$f(x,y) = \int_{C'} Y \cdot ds = \int_{C_1 \cup C_2} Y \cdot ds,$$

y mediante un cálculo directo se llega a que

$$f(x,y) = \frac{1}{2}\log(x^2 + y^2).$$

b) Como el campo es conservativo, su circulación a lo largo de una curva es igual a la diferencia de potencial entre sus extremos. Por lo tanto

$$\int_C Y \cdot ds = f(5,0) - f(1,1) = \frac{1}{2}(\log(25) - \log(2)).$$

2. a) La circulación de X a lo largo de la circunferencia de centro en el origen y radio 1 orientada en sentido antihorario es 2π, lo cual se constata a través del cálculo directo. Esto muestra que X no es conservativo, y por lo tanto no es de gradientes.

   b) El campo X es irrotacional, lo cual se constata calculando su rotor. Por lo tanto la circulación de X a lo largo de una curva que deja a $(0,0)$ en su interior sólo depende de la orientación de la curva y el número de vueltas que da alrededor de $(0,0)$. Como el cuadrado da una vuelta en sentido horario, $\int_C Z \cdot ds = -2\pi$.

   c) Es 0; ver teórico.