Capítulo 10

Curvas en paramétricas y polares

Introducción

Después del estudio detallado de funciones reales de variable real expresadas en forma explícita y con coordenadas cartesianas, que se ha hecho en el capítulo precedente, haremos ahora una breve exposición de las peculiaridades que puede presentar el estudio de curvas expresadas por dos ecuaciones $\{x = x(t),\ y = y(t)\}$ (curvas en paramétricas), o por una ecuación en coordenadas polares $\rho = f(\theta)$.

Intentaremos, en la medida de lo posible, presentar el proceso de estudiar las curvas hasta obtener su representación gráfica, de un modo paralelo al que se seguía cuando disponíamos de una expresión explícita, pero nos detendremos en aquellos elementos analíticos que requieren un tratamiento diferente.

En algunos casos, nos apoyaremos en las capacidades gráficas del sistema DERIVE.

1. Curvas en forma paramétrica

Dada una curva plana, se puede considerar que las coordenadas (x, y) de cada punto P vienen dadas en función de un parámetro cuyo valor determina la posición del punto.

Para los distintos valores del parámetro t las ecuaciones $\{x = x(t),\ y = y(t)\}$ recorren las coordenadas de los puntos de la curva.

1.1. Definición

Las ecuaciones $\{x = x(t),\ y = y(t)\}$, definidas en un dominio $D \subset \mathbb{R}$, normalmente un intervalo, son unas ecuaciones paramétricas de la curva del plano que se obtiene al variar t en D.

Ejemplo: *Las ecuaciones paramétricas* $\{x = r\cos t,\ y = r \operatorname{sen} t\}$ *con* $t \in [0, 2\pi]$ *describen la circunferencia de centro el origen y radio* r.

Observaciones:

1) *Observemos que una curva en ecuaciones paramétricas no es otra cosa que una aplicación definida en* D *y con valores en* $\mathbb{R}^2$.
2) *Si no se especifica* D, *se entiende que éste es el máximo subconjunto de* $\mathbb{R}$ *en el que tienen sentido las ecuaciones.*

3) La forma explícita $y = f(x)$ se puede ver como un caso particular de ecuaciones paramétricas donde el parámetro es la abscisa x.

4) Se considera la curva dada por las ecuaciones $\{x = x(t),\ y = y(t)\}$ y un punto de ésta, $(x_0, y_0) = \big(x(t_0), y(t_0)\big)$. Si en un entorno de t_0 se puede expresar y en función de x, $y = f(x)$, la derivada de f en x_0, si existe, verifica

$$f'(x_0) = \left(\frac{dy}{dx}\right)_{x=x_0} = \frac{\left(\dfrac{dy}{dt}\right)_{t=t_0}}{\left(\dfrac{dx}{dt}\right)_{t=t_0}} = \frac{y'(t_0)}{x'(t_0)}$$

Con esta expresión tenemos acceso a toda la información que proporciona la derivada. En particular, se puede usar la regla de la cadena para obtener, cuando existan, las derivadas sucesivas.

1.2. Tangente y normal

a) Dado el arco de curva $\{x = x(t),\ y = y(t)\}$, con $t \in [t_1, t_2]$, y $t_0 \in (t_1, t_2)$, si la curva tiene tangente en el punto $\big(x(t_0), y(t_0)\big)$, ésta viene dada por las ecuaciones paramétricas

$$\begin{cases} x(t) = x(t_0) + x'(t_0)(t - t_0) \\ y(t) = y(t_0) + y'(t_0)(t - t_0) \end{cases}$$

NOTA: *La ecuación de la tangente en forma explícita se puede escribir, si $x'(t_0) \neq 0$,*

$$y - y(t_0) = \frac{y'(t_0)}{x'(t_0)}\big(x - x(t_0)\big)$$

(véase problema resuelto 1).

Si $x'(t_0) = 0$ e $y'(t_0) \neq 0$, la curva tiene tangente vertical, $x = x(t_0)$, en el punto dado.

Si $y'(t_0) = 0$ y $x'(t_0) \neq 0$, la curva tiene tangente horizontal, $y = y(t_0)$, en el punto dado.

Los valores de t que verifican $x'(t) = y'(t) = 0$ dan lugar a "puntos singulares".

b) La ecuación de la recta normal a la curva en el punto $\big(x(t_0), y(t_0)\big)$ es, en forma paramétrica,

$$\begin{cases} x(t) = x(t_0) + y'(t_0)(t - t_0) \\ y(t) = y(t_0) - x'(t_0)(t - t_0) \end{cases}$$

NOTA: *Si $y'(t_0) \neq 0$, la ecuación de la recta normal en forma explícita será*

$$y - y(t_0) = -\frac{x'(t_0)}{y'(t_0)}\big(x - x(t_0)\big)$$

1.3. Simetrías

a) La curva $\{x(t),\ y(t)\}$ es simétrica respecto al eje OY si para todo t_0 existe t_1 tal que

$$\begin{cases} x(t_0) = -x(t_1) \\ y(t_0) = y(t_1) \end{cases}$$

b) La curva $\{x(t),\ y(t)\}$ es simétrica respecto al eje OX si para todo t_0 existe t_1 tal que

$$\begin{cases} x(t_0) = x(t_1) \\ y(t_0) = -y(t_1) \end{cases}$$

c) La curva $\{x(t),\ y(t)\}$ es simétrica respecto al origen si para todo t_0 existe t_1 tal que

$$\begin{cases} x(t_0) = -x(t_1) \\ y(t_0) = -y(t_1) \end{cases}$$

NOTAS:

1) *En el problema resuelto 3 se puede ver un ejemplo de estudio de las simetrías de una curva dada en paramétricas.*
2) *El estudio de las simetrías permite reducir el campo de estudio del parámetro t. Con frecuencia, se tiene $t_1 = -t_0$ (con lo que basta estudiar la curva en $t > 0$) ó $t_1 = \dfrac{1}{t_0}$ (con lo cual basta estudiar la curva en $|t| \leq 1$).*

1.4. Asíntotas

a) Horizontales.
Si existe t_0 (finito o infinito) tal que

$$\lim_{t\to t_0} x(t) = \infty \quad (\text{ó } -\infty) \qquad \text{y} \qquad \lim_{t\to t_0} y(t) = a$$

la curva tiene como asíntota horizontal la recta $y = a$.

b) Verticales.
Si existe t_0 (finito o infinito) tal que

$$\lim_{t\to t_0} y(t) = \infty \quad (\text{ó } -\infty) \qquad \text{y} \qquad \lim_{t\to t_0} x(t) = b$$

la curva tiene como asíntota vertical la recta $x = b$.

c) Oblicuas.
La recta $y = mx + n$ $(m \neq 0)$ es una asíntota oblicua si existe t_0 (finito o infinito) tal que

$$m = \lim_{t\to t_0} \frac{y(t)}{x(t)} \qquad \text{y} \qquad n = \lim_{t\to t_0} \big(y(t) - m\,x(t)\big)$$

siendo $\lim_{t\to t_0} x(t) = \infty$ (ó $-\infty$).

NOTA: *En el problema resuelto 4 se puede ver un ejemplo de obtención de las asíntotas de una curva dada en paramétricas.*

En cualquiera de los casos se tiene asíntota si las condiciones anteriores se verifican sólo en alguno de los límites laterales.

1.5. Máximos y mínimos de tangente horizontal

Los puntos críticos de tangente horizontal son aquellos puntos $\big(x(t_0), y(t_0)\big)$ que verifican

$$\left(\frac{dy}{dx}\right)_{t=t_0} = \frac{y'(t_0)}{x'(t_0)} = 0$$

es decir debe ser $y'(t_0) = 0$, $x'(t_0) \neq 0$.

Para estudiar el carácter del punto crítico se puede recurrir a las derivadas sucesivas, obtenidas como aplicación de la regla de la cadena (véase problema resuelto 5).

1.6. Puntos críticos de tangente vertical

Son los que verifican $x'(t_0) = 0$, $y'(t_0) \neq 0$. El comportamiento de la función en un entorno del punto crítico se puede analizar intercambiando los papeles de x e y (véase problema resuelto 6).

1.7. Puntos múltiples

Son los puntos para los que existen al menos dos valores distintos de t, t_1 y t_2, que verifican

$$\begin{cases} x(t_1) = x(t_2) \\ y(t_1) = y(t_2) \end{cases}$$

NOTA: *Si hay dos valores de t el punto se llama doble, triple si hay tres y así sucesivamente. Véase problema resuelto 7.*

2. Curvas en polares

2.1. Coordenadas polares

Las coordenadas polares de un punto del plano son un par (ρ, θ) donde ρ es la distancia (radio vector) a un punto fijo O (polo) y θ es el ángulo que el radio vector forma con una semirrecta fija (eje polar).

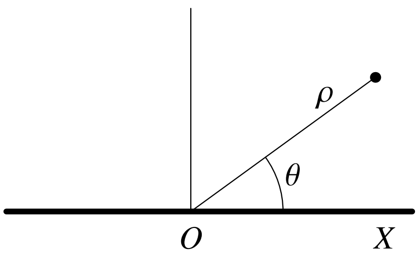

Fig. 10.1

NOTA: *Normalmente, el polo es el origen de coordenadas y el eje polar la parte positiva del eje OX. En este caso, la relación entre coordenadas polares y cartesianas viene dada por*

$$\begin{cases} x = \rho\cos\theta \\ y = \rho\,\mathrm{sen}\,\theta \end{cases}$$

y observemos que los puntos con coordenadas polares de la forma (ρ, θ) y $(\rho, \theta + 2k\pi)$, con $k \in \mathbb{Z}$, corresponden al mismo en coordenadas cartesianas.

2.2. Definición. Ecuación polar de una curva

La función $\rho = f(\theta)$ definida en un dominio $D \subset \mathbb{R}$, normalmente un intervalo, representa un arco de curva, lugar geométrico de los puntos cuyas coordenadas polares (ρ, θ) están ligadas por la relación dada, denominada ecuación polar de la curva.

EJEMPLO: *La función constante $\rho = a$ en coordenadas polares representa la circunferencia de centro el origen y radio a.*

NOTAS:

1) *Interpretando el significado geométrico de las coordenadas polares exigiremos que la función f sea positiva en D.*
2) *Si no se especifica el conjunto D se entenderá que es el máximo subconjunto de $\mathbb{R}$ donde f tiene sentido.*

OBSERVACIÓN: *Considerando θ como parámetro, una curva definida en polares $\rho = f(\theta)$ se puede considerar como un caso particular de curva en paramétricas con ecuaciones*

$$\begin{cases} x(\theta) = f(\theta)\cos\theta \\ y(\theta) = f(\theta)\,\mathrm{sen}\,\theta \end{cases}$$

Por esta razón, en el epígrafe que nos ocupa, estudiaremos sólo los aspectos característicos de las coordenadas polares.

2.3. Dominio de variación

Para obtener la representación total de una curva expresada en coordenadas polares, $\rho = f(\theta)$ con $\theta \in \mathbb{R}$, debemos analizar la función f en todo su dominio.

Si f es periódica de período T y analizamos la curva en un intervalo de longitud T, se puede obtener la posición del punto de la curva $(\rho, \theta + T)$ sin más que girar un ángulo T la del punto (ρ, θ). En particular si T es un divisor de 2π, girando la gráfica obtenida en $[0, T]$ un número de veces igual a $\dfrac{2\pi}{T}$ obtenemos la gráfica en $[0, 2\pi]$ (véase problema resuelto 13). Además, una vez dibujada la gráfica para los valores de θ correspondientes al intervalo $[0, 2\pi]$ se tienen todos los puntos de la curva, es decir cualquier valor de $\theta \in \mathbb{R}$ da lugar a un punto que ya está dibujado. Si se dibuja la curva en $\theta \in [0, 4\pi]$, todos sus puntos serían dobles; si lo hacemos en un intervalo de longitud 6π todos serían triples, etc.

En general, si f es periódica de período T, la gráfica sólo se repetirá después de un intervalo de longitud T y por tanto se necesitará estudiar la función en un intervalo de dicha longitud para tener el dibujo completo de la curva $\rho = f(\theta)$, $\theta \in \mathbb{R}$ (véase problema resuelto 14).

2.4. Simetrías

Dada la función $\rho = f(\theta)$, si se verifica $f(\theta) = f(-\theta)$, la curva correspondiente es simétrica respecto al eje polar (el eje OX).

Si se verifica $f(\theta) = f(\pi - \theta)$, la curva será simétrica respecto a la perpendicular por el polo al eje polar (el eje OY).

Si se verifica $f(\theta) = f(\pi + \theta)$, la curva será simétrica respecto al polo (el origen).

NOTAS:

1) *En el problema resuelto 11 se puede ver un ejemplo de estudio de las simetrías de una curva dada en coordenadas polares.*
2) *Si $f(2k\pi - \theta) = f(\theta)$ para algún $k \in \mathbb{Z}$, también se verifica que la curva es simétrica respecto del eje polar, teniéndose resultados análogos para las otras simetrías.*

2.5. Comportamiento asintótico

Dada la curva $\rho = f(\theta)$ se tiene:

a) Si existe $K \in \mathbb{R}$ tal que $\lim_{\theta \to K} f(\theta) = \infty$, la curva tiene una asíntota que forma un ángulo de K radianes con el eje polar.

b) El círculo $\rho = K$ es círculo asintótico de la curva si $\lim_{\theta \to \infty} f(\theta) = K$ ó $\lim_{\theta \to -\infty} f(\theta) = K$.

NOTAS:

1) *En el problema resuelto 12 se pueden ver ejemplos de estudio del comportamiento asintótico de curvas dadas en coordenadas polares.*
2) *En el caso particular de $K = 0$ el polo es un "sumidero".*
3) *Si $\lim_{\theta \to \infty} f(\theta) = \infty$ se dice que la curva tiene una rama espiral.*

2.6. Ángulos y tangentes

Sea α el ángulo que forma la tangente a la curva $\rho = f(\theta)$ en un punto con el radio vector correspondiente a dicho punto. Entonces se verifica que $\operatorname{tg} \alpha = \dfrac{\rho}{\rho'}$

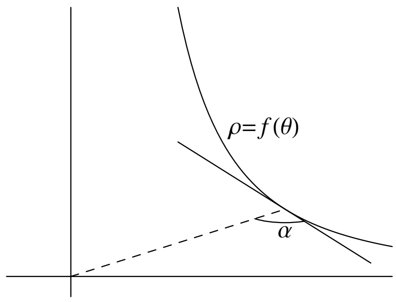

Fig. 10.2

NOTA: *Si existe θ_0 tal que $f(\theta_0) = 0$ entonces la curva pasa por el polo y si tiene tangente en este punto, debe ser la recta de ecuación, en coordenadas polares, $\theta = \theta_0$.*