Primer parcial de Cálculo 3

Esbozo de la solución

8 de mayo de 2012

1 Ejercicios de Múltiple Opción

- C
- B
- C
- B
- A

2 Ejercicios de desarrollo

1. Ver teórico.
2. 1. a) El campo Y es irrotacional (lo cual se verifica calculando su rotor). Por el teorema de Green, su circulación a lo largo de cualquier curva cerrada que no deje a $(0,0)$ en su interior es cero.
      Sea C la circunferencia de centro en el origen y radio 1. Parametrizándola por $t \mapsto (\cos t, \text{sent})$ un cálculo directo muestra que $\int_C Y \cdot ds = 0$. Siendo Y irrotacional, esto basta para afirmar que la circulación de Y a lo largo de cualquier curva cerrada que encierra al origen es 0.
      Por lo tanto Y es conservativo, lo que es lo mismo que ser de gradientes.
      Hallaremos un potencial $f(x,y)$; concretamente el que vale 0 en el punto $(1,0)$. Consideremos un punto $(x,y) = (r\cos\theta, r\text{sen}\theta)$. Vamos a dar una curva C' que une al punto (x,y) con el $(1,0)$, que será la concatenación de dos curvas C_1 y C_2 definidas del siguiente modo:
      - C_1 está parametrizada por $t \mapsto (\cos t, \text{sen t})$ para $0 \leq t \leq \theta$.
      - C_2 está parametrizada por $t \mapsto (t\cos\theta, t\ sen\ \theta)$ para t entre 1 y r.

      Entonces
      $$f(x,y) = \int_{C'} Y \cdot ds = \int_{C_1 \cup C_2} Y \cdot ds,$$

y mediante un cálculo directo se llega a que

$$f(x,y) = \frac{1}{2}\log(x^2+y^2).$$

b) Como el campo es conservativo, su circulación a lo largo de una curva es igual a la diferencia de potencial entre sus extremos. Por lo tanto

$$\int_C Y \cdot ds = f(5,0) - f(1,1) = \frac{1}{2}(\log(25) - \log(2)).$$

2. a) La circulación de X a lo largo de la circunferencia de centro en el origen y radio 1 orientada en sentido antihorario es 2π, lo cual se constata a través del cálculo directo. Esto muestra que X no es conservativo, y por lo tanto no es de gradientes.

   b) El campo X es irrotacional, lo cual se constata calculando su rotor. Por lo tanto la circulación de X a lo largo de una curva que deja a $(0,0)$ en su interior sólo depende de la orientación de la curva y el número de vueltas que da alrededor de $(0,0)$. Como el cuadrado da una vuelta en sentido horario, $\int_C Z \cdot ds = -2\pi$.

   c) Es 0; ver teórico.