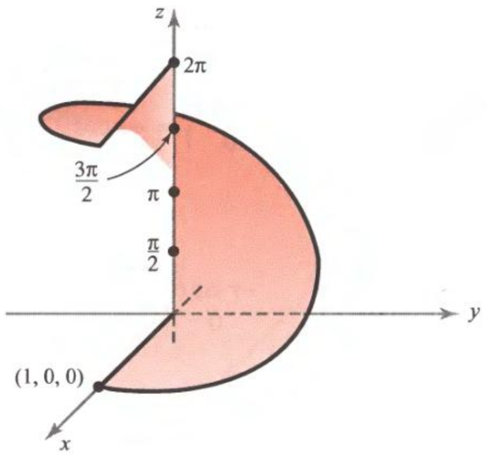
Cálculo 3

Examen - Febrero - Curso 2012

18 de febrero de 2012

Número de prueba	APELLIDO, Nombre	Cédula de identidad

Ejercicio 1 (20 puntos)



Un helicoide es una superficie parametrizada por:

$$\begin{cases} x &= r\cos\theta \\ y &= r\sin\theta \\ z &= \theta \end{cases} \qquad \begin{array}{c} r \in [0,1] \\ \theta \in [0, 2\pi] \end{array}$$

Encontrar su área.

Sugerencia: Tener en cuenta que

$$\int_0^1 \sqrt{x^2+1}dx = \frac{1}{2}(\sqrt{2} + \log(1+\sqrt{2}))$$

Solución:

$$\text{área}(S) \quad = \quad \iint_S \|\varphi_r \wedge \varphi_\theta\| dr\, d\theta$$

Ahora, $\varphi_r = (\cos\theta, \sin\theta, 0)$ y $\varphi_\theta = (-r\sin\theta, r\cos\theta, 1)$, por lo tanto:

$$\varphi_r \wedge \varphi_\theta = \begin{vmatrix} i & j & k \\ \cos\theta & \sin\theta & 0 \\ -r\sin\theta & r\cos\theta & 1 \end{vmatrix} = (\sin\theta, -\cos\theta, r(\cos^2\theta + \sin^{2\theta}))$$

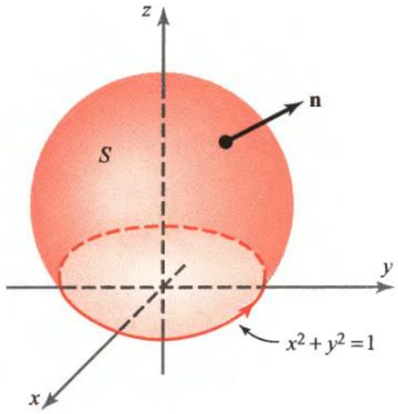
de aquí tenemos que:

$$\|\varphi_r \wedge \varphi_\theta\| = \sqrt{r^2+1}$$

entonces

$$\text{área}(S) = \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^1 \sqrt{r^2+1}dr = \pi(\sqrt{2} + \log(1+\sqrt{2}))$$

Ejercicio 2 (40 puntos)



Consideremos la superficie S de la figura, con la normal $\mathbf{n}$ que aparece en la ilustración. Observar que S no es una superficie cerrada.
Consideremos también el campo $\vec{X}(x,y,z)=(y,-x,e^{xz})$.

(1) (10 puntos) Indicar si el flujo del rotor de $\vec{X}$ a través de la superficie S es positivo, negativo o cero.

(2) (30 puntos) Calcular el flujo del rotor de $\vec{X}$ a través de la superficie S.

Solución: El flujo del rotor de X a través de la superficie S es

$$\iint_S \mathrm{rot}\vec{X}\mathbf{n}dS$$

Una forma de estimar rápidamente el signo del flujo es calcular el rotor de $\vec{X}$, y observar si el signo de $\mathrm{rot}\vec{X}.\mathbf{n}$ es constante.

$$\mathrm{rot}X=\begin{vmatrix} i & j & k \\ \partial_x & \partial_y & \partial_z \\ y & -x & e^{xz} \end{vmatrix}=(0,-ze^{xz},-2)$$

dada la simetría de la superficie S respecto del eje z, la segunda componente del rotor, terminará anulándose, por lo que sólo la tercera componente será relevante. Claramente, la tercera componente de $\mathbf{n}$ es positiva, con lo cual $\mathrm{rot}\vec{X}.\mathbf{n}$ tiene signo constante negativo, y surge entonces que el flujo de $\vec{X}$ a través de la superficie es negativo. Esta estimación es innecesaria si se hace (bien) el paso que sigue.

Usando el Teorema de Stokes, se tiene que

$$\iint_S \mathrm{rot}\vec{X}\mathbf{n}dS=\int_{\mathcal{C}}\vec{X}ds$$

donde la curva $\mathcal{C}$ es recorrida respetando la ley del destornillador; es decir, si uno estuviera parado en el origen, como el vector $\vec{k}$, la curva $\mathcal{C}$, contenida en el plano xy, se vería recorrida en sentido antihorario.
Ahora, la curva $\mathcal{C}$ admite la parametrización: $\alpha(t)=(\cos t,\sin t,0)$, por lo tanto tenemos:

$$\int_{\mathcal{C}}\vec{X}ds=\int_0^{2\pi}\vec{X}(\alpha(t)).\alpha(t)\,dt=\int_0^{2\pi}(y(t)\dot{x}(t)-x(t)\dot{y}(t)+e^{x(t)z(t)}\dot{z}(t))dt$$

es decir

$$\int_{\mathcal{C}}\vec{X}ds=\int_0^{2\pi}(-\sin^2 t-\cos^2 t)dt=\quad -2\pi$$

Con lo cual tenemos que el flujo del campo $\vec{X}$ a través de la superficie S es negativo e igual a -2π.

Ejercicio 3 (40 puntos)

Sea $\vec{X}(x,y,z)=(2x,y^2,z^2)$, y sea S la esfera unidad centrada en el origen. Calcular

$$\iint_S \vec{X}.\mathbf{n}dS$$

Solución:

por el Teorema de Gauss tenemos:

$$\iint_S \vec{X}\mathbf{n}dS = \iiint_V \mathrm{div}\vec{X}dv$$

donde V es la bola unidad. Calculamos la divergencia de $\vec{X}$:

$$\mathrm{div}\vec{X}(x,y,z) = \partial_x(2x) + \partial_y(y^2) + \partial_z(z^2) = 2(1+y+z)$$

Tenemos entonces:

$$\iiint_V \mathrm{div}\vec{X}dV = 2\iiint_V (1+x+y)dxdydz = 2\mathrm{vol}(\text{bola radio } 1) = \frac{8\pi}{3}$$