Universidad de la República | **Cálculo 3**
Facultad de Ingeniería - IMERL | **Primer Semestre 2014**

Examen – Martes 9 de diciembre de 2014

Nro de Examen	Cédula	Apellido y nombre

- La duración del examen es 3 horas.
- El puntaje mínimo para aprobar es 50 puntos.

Notación: En el parcial se usa la siguiente notación:

- Rotor de un campo vectorial: $\nabla \times F$

Sugerencias: Puede ser de utilidad la siguiente información:

- Si m y n son dos números naturales entonces: $\int_0^{2\pi} \cos(mt)\cos(nt)dt = \begin{cases} \pi & \text{si } m = n \\ 0 & \text{si } m \neq n \end{cases}$
- Si $\gamma = \gamma(t)$ es una curva diferenciable en $\mathbb{R}^3$ entonces el versor normal en cada $t \in \mathbb{R}$ es: $\vec{n}(t) = \frac{(\dot{\gamma}(t)\wedge\ddot{\gamma}(t))\wedge\dot{\gamma}(t)}{\|(\dot{\gamma}(t)\wedge\ddot{\gamma}(t))\wedge\dot{\gamma}(t)\|}$.

(I) Múltiple opción. Total: 50 puntos

Puntajes: 10 puntos si la respuesta es correcta, -2 puntos si la respuesta es incorrecta, 0 punto por no contestar.

Indique sus respuestas en los casilleros correspondientes:

Ejercicio 1	Ejercicio 2	Ejercicio 3	Ejercicio 4	Ejercicio 5

Ejercicio 1

Considere la curva cerrada en $\mathbb{R}^2$ definida por las ecuaciones paramétricas:

$$x(t) = a(3\cos t + \cos(3t)), \;\; y(t) = a(3\,\mathrm{sen}\, t + \mathrm{sen}(3t)),$$

$t \in [0, 2\pi]$, donde a es un parámetro positivo fijo.
El área encerrada por la curva es:

A) $24a\pi$.
B) $3\pi a^2$.
C) $24\pi a^2$.
D) $12\pi a^2$.
E) πa^2.

Ejercicio 2

Considere el campo vectorial $F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ definido por $F(x, y, z) = (x + y^2 + z^4)(1, 1, 1)$. Sea Ω la esfera de centro $P = (1, 0, 0)$ y radio ρ.

Entonces $\lim_{\rho\to 0} \frac{\int_{\partial\Omega} F\cdot d\vec{S}}{\int_{\Omega} dV}$ es:

A) 0.
B) 7.
C) 4π.
D) 1.
E) π.

Ejercicio 3

Considere la curva $\gamma(t) = (t^2, \mathrm{sen}(t), e^{-2t})$, $t \in \mathbb{R}$. El triedro de Frenet en el punto $(0,0,1)$ es:

A) $\vec{t} = (0,1,-2)$, $\vec{b} = (2,0,4)$, $\vec{n} = (-4,4,2)$.
B) $\vec{t} = \left(0, \frac{1}{\sqrt{5}}, -\frac{2}{\sqrt{5}}\right)$, $\vec{b} = \left(-\frac{2}{3}, \frac{2}{3}, \frac{1}{3}\right)$, $\vec{n} = \left(\frac{1}{\sqrt{5}}, 0, \frac{2}{\sqrt{5}}\right)$.
C) $\vec{t} = \left(0, \frac{1}{\sqrt{5}}, -\frac{2}{\sqrt{5}}\right)$, $\vec{b} = \left(\frac{2}{3}, -\frac{2}{3}, -\frac{1}{3}\right)$, $\vec{n} = \left(\frac{\sqrt{5}}{3}, \frac{4}{3\sqrt{5}}, \frac{2}{3\sqrt{5}}\right)$.
D) $\vec{t} = (0,1,-2)$, $\vec{b} = \left(\frac{1}{\sqrt{6}}, -\frac{1}{\sqrt{6}}, -\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}\right)$, $\vec{n} = \left(\frac{2}{\sqrt{5}}, 0, \frac{1}{\sqrt{5}}\right)$.
E) $\vec{t} = (0,1,-2)$, $\vec{b} = \left(-\frac{2}{\sqrt{5}}, 0, -\frac{1}{\sqrt{5}}\right)$, $\vec{n} = \left(\frac{1}{\sqrt{6}}, -\frac{1}{\sqrt{6}}, -\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}\right)$.

Ejercicio 4

Sea $F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ un campo solenoidal con singularidades en los puntos $A = (0,2,4)$, $B = (0,0,1)$ y $C = (2,2,0)$. Sean $\mathcal{E}_1$ la esfera de centro en A y radio 3, $\mathcal{E}_2$ la esfera de centro en A y radio 4, y $\mathcal{E}_3$ la esfera de centro en $(0,0,0)$ y radio 3 e I_1, I_2, I_3 los respectivos flujos salientes de F a través de las superficies de las esferas.
Considere la superficie S definida por el borde del volumen

$$\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \ : \ x^2 + y^2 \leq z \text{ y } x^2 + y^2 + z^2 \leq 9\}$$

e I el flujo saliente de F a través de la superficie S.
Entonces:

A) $I = I_2 - I_1$.
B) $I = I_2$.
C) $I = I_1 + I_3$.
D) $I = I_1 + I_2 - I_3$.
E) $I = I_3$.

Ejercicio 5

Considere la función $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ definida por:

$$f(x,y,z) = x^2y + yz + xz$$

y la forma diferencial $\omega_{(x,y,z)} = f(x,y,z)\, dz$.
Entonces:

A) $\omega \wedge d\omega_{(x,y,z)} = 0$.
B) $\omega \wedge d\omega_{(x,y,z)} = (2xy^2z + yz)\, dx \wedge dy \wedge dz$.
C) $\omega \wedge d\omega_{(x,y,z)} = (2x^4y + yz^2 + x^3z)\, dx \wedge dy \wedge dz$.
D) $\omega \wedge d\omega_{(x,y,z)} = (x^2y + yz + xz)(2xy + z)(x^2 + z)\, dx \wedge dy \wedge dz$.
E) $\omega \wedge d\omega_{(x,y,z)} = (x^2y + yz + xz)(-2xy - z)(x^2 + z)\, dx \wedge dy \wedge dz$.

(II) Desarrollo. Total: 50 puntos

Problema 1 (20 puntos)

La Ley de Gauss para el campo eléctrico E producido por una distribución de cargas en $\mathbb{R}^3$ establece que el flujo saliente de E a través de una superficie cerrada S es:

$$\int_S E \cdot d\vec{S} = 4\pi Q_{int},$$

donde Q_{int} es la carga total en el interior de la superficie S.
Considere una superficie esférica de radio R con centro en el origen, cargada de manera uniforme con una distribución de carga total Q.

a) **(10 puntos)** Calcule el campo eléctrico $E(x, y, z)$ en un punto **exterior** de la superficie cargada (esto es: $\sqrt{x^2 + y^2 + z^2} > R$).

b) **(10 puntos)** Calcule el campo eléctrico $E(x, y, z)$ en un punto **interior** de la superficie cargada (esto es: $\sqrt{x^2 + y^2 + z^2} < R$).

Problema 2 (30 puntos)

Sean S_1 y S_2 dos superficies orientadas con borde tales que $\partial S_1 = \partial S_2 = C$, y tales que las orientaciones de S_1 y S_2 inducen la misma orientación en C. Sea $F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ un campo de rotores (esto es, $F = \nabla \times A$ para un campo vectorial A).

a) **(6 puntos)** Pruebe que el flujo de F a través de S_1 es igual al flujo de F a través de S_2.

b) **(8 puntos)** Considere el campo $F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ definido por

$$F(x, y, z) = \left(x^2 e^z - 2ye^{-z}, 0, -2xe^z\right).$$

Pruebe que F es un campo de rotores.

Considere ahora la superficie S definida por la ecuación $z = \frac{(x^2+y^2)}{2}$, con $x^2 + y^2 \leq 4$, orientada con la normal hacia arriba.

c) **(8 puntos)** Calcule el flujo del campo F a través de S.

d) **(8 puntos)** Calcule el flujo del campo $\nabla \times F$ a través de S.

SOLUCIÓN

(I) Múltiple opción

Ejercicio 1	Ejercicio 2	Ejercicio 3	Ejercicio 4	Ejercicio 5
D	D	C	A	A

(II) Desarrollo

Problema 1

Por la simetría del problema queda claro que el campo eléctrico E debe tener dirección radial y módulo dependiente de la distancia al origen. De manera que el campo en un punto genérico $P = (x, y, z)$ (interior o exterior a la superficie esférica) es de la forma

$$E(x, y, z) = \parallel E \parallel \hat{r},$$

donde: $\hat{r} = \frac{(x,y,z)}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$.

a) Sea $P = (x, y, z)$ un punto **exterior** a la superficie esférica cargada. Consideremos la superficie esférica S con centro en el origen y radio $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$. El campo E es uniforme y normal a esa superficie, de manera que:

$$\int_S E \cdot d\vec{S} = \parallel E \parallel A(S) = \parallel E \parallel 4\pi r^2.$$

Por otra parte la carga total en el interior de la superficie S es $Q_{int} = Q$. Así que de la Ley de Gauss se obtiene $\parallel E \parallel = \frac{Q}{r^2}$, y entonces:

$$E(x, y, z) = \frac{Q}{r^2}\hat{r} = \frac{Q}{(x^2 + y^2 + z^2)^{\frac{3}{2}}}(x, y, z).$$

b) Sea $P = (x, y, z)$ un punto **interior** a la superficie esférica cargada. Consideremos la superficie esférica S con centro en el origen y radio $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$. El campo E es uniforme y normal a esa superficie, de manera que:

$$\int_S E \cdot d\vec{S} = \parallel E \parallel A(S) = \parallel E \parallel 4\pi r^2.$$

Por otra parte la carga total en el interior de la superficie S es $Q_{int} = 0$. Así que de la Ley de Gauss se obtiene $\parallel E \parallel = 0$, y entonces:

$$E(x, y, z) = (0, 0, 0).$$

Problema 2

a) Utilizando dos veces el teorema de Stokes se tiene que:

$$\int_{S_1} F \cdot d\vec{S} = \int_{S_1} \nabla \times A \cdot d\vec{S} = \int_C A = \int_{S_2} \nabla \times A \cdot d\vec{S} = \int_{S_2} F \cdot d\vec{S}.$$

b) Es fácil verificar que $\nabla \cdot F = 0$. Como F es un campo diferenciable definido sobre todo $\mathbb{R}^3$, esa condición garantiza que F es un campo de rotores.

Otra posibilidad es obtener explícitamente un potencial vector A para el campo F. Es sencillo verificar, por ejemplo, que $A = (0, x^2 e^z, y^2 e^{-z})$ cumple $F = \nabla \times A$.

c) Como F es un campo de rotores podemos usar el resultado de la parte a) y cambiar la superficie S por el disco $D = \{(x, y, z) : x^2 + y^2 \leq 4,\ z = 2\}$, con normal $n = (0, 0, 1)$:

$$\int_D F \cdot d\vec{S} = -\int_D 2xe^2 dS = 0.$$

d) Se cumple: $\nabla \times F(x, y, z) = (0, -2e^z - x^2 e^z - 2ye^{-z}, -2e^{-z})$. Usando el resultado de la parte a) y el disco D se obtiene:

$$\int_S \nabla \times F \cdot d\vec{S} = \int_D \nabla \times F \cdot d\vec{S} = -\int_D 2e^{-2} dS = -8\pi e^{-2}.$$