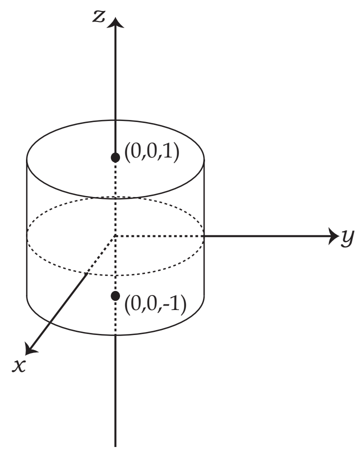
SEGUNDO PARCIAL – 3 DE JULIO DE 2014

Ejercicio 1: Teorema de Gauss

Sea S la superficie cerrada cilíndrica de altura 2 y radio 1, centrada en el origen, y con su eje contenido en el eje z (esto es: la base del cilindro se encuentra en $z = -1$ y la tapa en $z = 1$). Considere el campo vectorial $F(x, y, z) = (y^2x, x^2y, z(x^2 + y^2))$. Entonces el flujo saliente de F sobre S es:



Sea V el volumen encerrado por S, consideremos la siguiente parametrización del mismo:

$$\begin{cases} x = r\cos\theta, & r \in [0,1] \\ y = r\sin\theta, & \theta \in [0,2\pi] \\ z = v, & v \in [-1,1] \end{cases}$$

donde el Jacobiano de este cambio de variable es r.
Aplicando el teorema de Gauss

$$\begin{aligned} \iint_S F \cdot N dS &= \iiint_V \operatorname{div} F dV = \iiint_V 2\big(x^2 + y^2\big) dxdydz \\ &= \int_{-1}^{1}\int_0^{2\pi}\int_0^1 2r^2 r dr d\theta dv \\ &= 4\pi \int_0^1 2r^3 dr = 2\pi r^4\Big|_0^1 = 2\pi. \end{aligned}$$

Ejercicio 2: Teorema de Stokes

Considere el campo vectorial $F(x, y, z) = (2y + \arcsin x, e^{y^2}, y^2 + \ln(z^2 + 4))$. Sea C el contorno del triángulo con vértices en $(1, 0, 0)$, $(0, 1, 0)$ y $(0, 0, 2)$, con la orientación dada por el orden que indican los vértices. Entonces $\oint_C F$ es:
El triángulo está contenido en el plano que pasa por sus tres vértices:

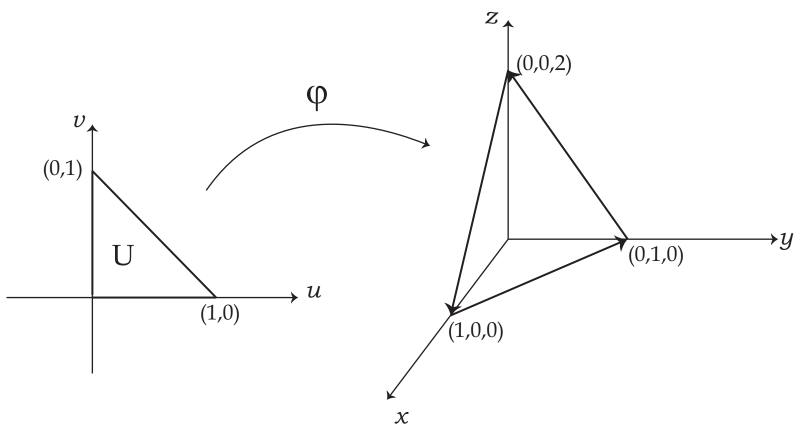
$$\pi : 2x + 2y + z = 2$$

De donde tenemos que $z = 2(1 - x - y)$. Aplicando el teorema de Stokes tenemos que

$$\oint_C F = \iint_S \operatorname{rot} F \cdot N dS,$$

donde S es una superficie cuyo borde es el triángulo. El rotor de F es: $\operatorname{rot} F = \big(2y, 0, -2\big)$.
Consideremos S la superficie contenida en el plano π con borde el triángulo. Una parametrización de

la misma está dada por:



$$\varphi : U \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3,\ (u,v) \mapsto \big(u, v, 2(1-u-v)\big),$$

donde $U = \big\{(u,v) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq u \leq 1, 0 \leq v \leq 1-u\big\}$. Observar que $\varphi_u \wedge \varphi_v = (2,2,1)$, entonces esta parametrización tiene orientación coherente con la del triángulo.

$$\begin{aligned}
\iint_S \operatorname{rot} F \cdot N dS &= \iint_U \big(2v, 0, -2\big) \cdot \big(2,2,1\big) dudv \\
&= \iint_U \big(4v-2\big) dudv \\
&= \int_0^1 \int_0^{1-u} \big(4v-2\big) dvdu \\
&= \int_0^1 \big(2v^2 - 2v\big) \Big|_0^{1-u} du \\
&= \int_0^1 \big(2u^2 - 2u\big)\, du \\
&= \frac{2}{3}u^3 - u^2 \Big|_0^1 = -\frac{1}{3}.
\end{aligned}$$