Sistemas Lineales 1: Diagramas de Bode

Pablo Monzón

Instituto de Ingeniería Eléctrica (IIE)
Facultad de Ingeniería-Universidad de la República
Uruguay

Primer semestre - 2018

Contenido

Diagramas de Bode

Transferencia en régimen sinusoidal

- Mediante el uso de fasores, obtenemos $H(j\omega) = \frac{V_o(j\omega)}{V_i(j\omega)}$.
- Sabemos que para una entrada sinusoidal $v_i(t) = E\cos(\tilde{\omega}t + \varphi)$, el sistema responde en régimen con

$$v_o(t) = E|H(j\tilde{\omega})|\cos\left[\tilde{\omega}t + \varphi + argH(j\tilde{\omega})\right]$$

- Para una entrada periódica $v_i(t) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} c_n(v_i)e^{jn\omega_0 t}$, el sistema responde en régimen con

$$v_o(t) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} c_n(v_i)H(jn\omega_0)e^{jn\omega_0 t}$$

- Es útil entonces tener una representación gráfica del módulo y la fase de la transferencia, para saber cómo responde en frecuencia el sistema.

Diagramas de Bode

Diagramas de Bode

- Son una forma de representar transferencias en régimen sinusoidal.
- Son dos gráficas: módulo y fase de $H(j\omega)$ en función de la frecuencia de trabajo.
- Se aplican a una clase particular de transferencias y resultan una forma muy adecuada de presentar la respuesta en frecuencia de los circuitos.

Diagramas de Bode

Filtro pasabajos

- Consideremos el filtro pasabajos de transferencia

$$H(j\omega) = \frac{1}{1 + RCj\omega} = \frac{\frac{1}{RC}}{\frac{1}{RC} + j\omega} = \frac{\omega_0}{j\omega + \omega_0}$$

- Sabemos que si nuestra entrada es de la forma $e(t) = A\cos(\tilde{\omega}t)$, la respectiva respuesta en régimen será

$$r(t) = A.\left|H(j\tilde{\omega})\right|.\cos\left[\tilde{\omega}t + argH(j\tilde{\omega})\right]$$

ó

$$r(t) = A.\left(\frac{\omega_0}{\sqrt{\omega_0^2 + \tilde{\omega}^2}}\right).\cos\left[\tilde{\omega}t - atan\left(\frac{\tilde{\omega}}{\omega_0}\right)\right]$$

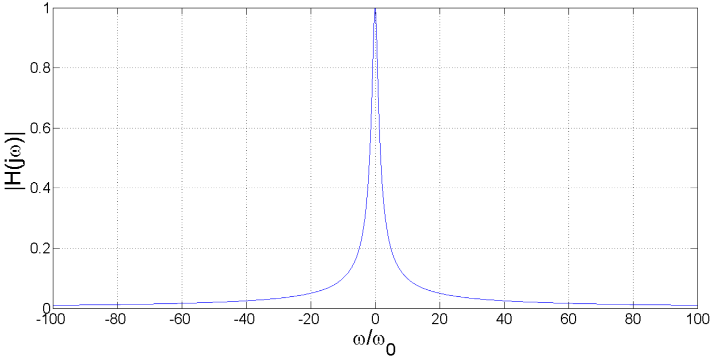
Diagramas de Bode

Filtro pasabajos

- Viendo cómo varían el módulo y la fase de $H(j\omega)$ en función de ω, podemos tener una idea de cómo responde el circuito a sinusoides de distintas frecuencias (y por ende a señales periódicas y señales cualesquiera, gracias a la teoría de las series y transformadas de Fourier).
- Observemos el módulo de $H(j\omega)$.

Diagramas de Bode

Módulo de $H(j\omega) = \frac{\omega_0}{\sqrt{\omega_0^2+\omega^2}}$, $(\omega = 2\pi f)$



Diagramas de Bode

Módulo de $H(j\omega)$

- Mirando la expresión de H, vemos que para frecuencias pequeñas, el módulo se aproxima a 1, en tanto para frecuencias altas, el módulo se achica considerablemente.
- Si, por ejemplo, nos interesan las señales de audio, tenemos que considerar distintas *bandas* de frecuencia, que se corresponden a los tonos graves, medios y agudos.
- Esto implica mirar, por ejemplo, la banda de graves, que va de unas pocas decenas de Hz hasta los $200Hz$, junto con la banda de agudos que llega hasta los kHz.
- Resulta difícil en una gráfica como la anterior, obtener una descripción que muestre el comportamiento del circuito en ambas bandas de interés, ya que si se quiere tener mayor definición en los agudos, se debe resignar poder visualizar los graves.

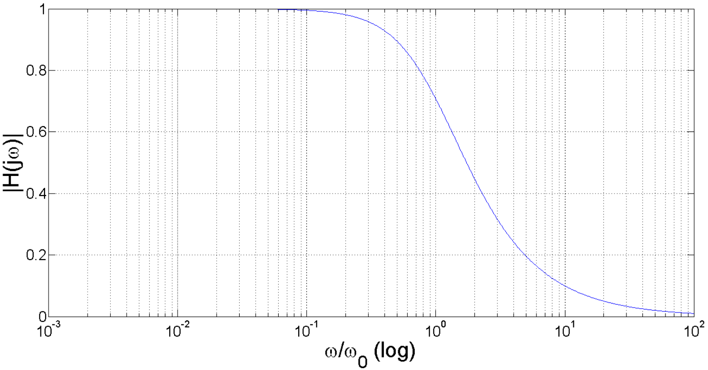
Diagramas de Bode

Solución:

- Utilicemos una escala logarítmica para representar la dependencia del módulo con la frecuencia.
- En base 10, la banda de $20Hz$ a $200Hz$ ocupa el mismo espacio que la banda de $2kHz$ a $20kHz$.
- Ojo, sólo graficamos frecuencias positivas (veremos que esto no es un problema).

Diagramas de Bode

Módulo de $H(j\omega)$ - gráfica logarítmica en las abscisas



Diagramas de Bode

Recordar propiedades del logaritmo

- $\log(M) = \beta \Leftrightarrow 10^{\beta} = M$
- $\log(x) \to -\infty$ cuando $x \to 0^{+}$
- $\log(x) \to +\infty$ cuando $x \to +\infty$
- $\log(xy) = \log(x) + \log(y)$; $\log\left(\frac{x}{y}\right) = \log(x) - \log(y)$
- $\log\left(\frac{1}{x}\right) = -\log(x)$
- $\log(x^{\alpha}) = \alpha \log(x)$

Diagramas de Bode

Distancias logarítmicas

- La distancia *lineal* entre dos frecuencias ω_1 y ω_2 se define como $\omega_1 - \omega_2$.
- La distancia *logarítmica* entre dos frecuencias ω_1 y ω_2 se define como

$$\log(\omega_1) - \log(\omega_2) = \log\left(\frac{\omega_1}{\omega_2}\right)$$

- Decimos que dos frecuencias distan *una década* si su cociente es 10 ó $\frac{1}{10}$.
- Decimos que dos frecuencias distan *una octava* si su cociente es 2 ó $\frac{1}{2}$ (mayormente usada en música y acústica).

Diagramas de Bode

Distancias logarítmicas: ejemplos

- Calculemos la distancia en décadas entre dos frecuencias f_1 y f_2.
- Dicha distancia d_{10} es tal que $f_2 = 10^{d_{10}}.f_1$, de donde

$$d_{10} = \log\left(\frac{f_2}{f_1}\right)$$

- Calculemos la distancia en octavas entre las frecuencias f_1 y f_2.
- Dicha distancia d_2 es tal que $f_2 = 2^{d_2}.f_1$, de donde

$$d_2 = \log_2\left(\frac{f_2}{f_1}\right)$$

- Para las frecuencias $f_1 = 1kHz$ y $f_2 = 100kHz$:

$$d_{10} = log(100) = 2 \text{ décadas} \quad , \quad d_2 = log_2(100) \approx 6,64 \text{ octavas}$$

Diagramas de Bode

- El módulo de la transferencia en régimen representa la *ganancia* en amplitud que aporta el sistema.
- Desde el punto de vista sonoro, el cuadrado de la amplitud define la *intensidad* sonora.
- El oído *escucha logarítmicamente*: una cambio de intensidad de 1 a 10 se percibe igual que de 10 a 100!!.
- Se introdujo una medida logarítmica para las intensidades sonoras, que captura ese fenómeno: el Bell.

Diagramas de Bode

Decibeles

- Es una unidad para medir cocientes de intensidades o potencias.
- Se define así: dos magnitudes M_1 y M_2 tienen una relación de β *Bells* si

$$10^{\beta} = \frac{M_1}{M_2} \Leftrightarrow \log\left(\frac{M_1}{M_2}\right)$$

- Es positiva si la intensidad o potencia M_1 es mayor que M_2 y negativa en caso contrario.
- En la práctica, se usa el *decibel* (db, DB, dB) (décima parte del bell), que da valores más manejables:

$$\beta\, db = 10.\log\left(\frac{M_1}{M_2}\right) \Leftrightarrow 10^{\frac{\beta}{10}} = \frac{M_1}{M_2}$$

Diagramas de Bode

Decibeles

- Para medir sonido, se define una intensidad de referencia $I_0 = 10^{-16} Watt/cm^2$ y entonces se define la magnitud en db de un sonido de intensidad I como:

$$\beta\, db = 10. \log \left(\frac{I}{I_0} \right)$$

- Existen otras definiciones que permiten caracterizar intensidades sonoras.
- Muchas de ellas agregan información *espectral* (estructura en frecuencia del sonido).

Diagramas de Bode

Decibeles

- Si en lugar de medir intensidades o potencias, medimos la ganancia en amplitud, entonces

$$\beta\ db = 20.\log\left(\frac{A_1}{A_2}\right)$$

ya que las intensidades y potencias están relacionadas con los cuadrados de las amplitudes.

- Usaremos los decibeles para medir el módulo de la transferencia en régimen

$$\boxed{|H(j\omega)|(db) = 20.\log(|H(j\omega)|)}$$

Diagramas de Bode

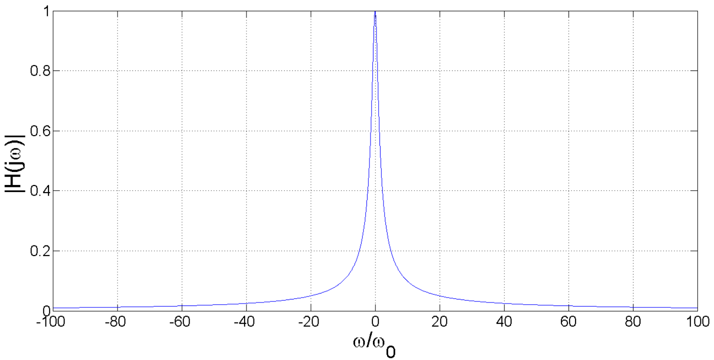
Módulo de $H(j\omega)$ en db

$$\boxed{|H(j\omega)|(db) = 20.\log(|H(j\omega)|)}$$

- Si la amplitud de la salida es mayor que la de la entrada, entonces $|H(j\omega)|(db) > 0$ (*amplificación*).
- Si al amplitud de la salida es menor que la de la entrada, entonces $|H(j\omega)|(db) < 0$ (*atenuación*).
- Si $|H(j\omega)| \to 0$, entonces $|H(j\omega)|(db) \to -\infty$.
- Si $|H(j\omega)| \to +\infty$, entonces $|H(j\omega)|(db) \to +\infty$.

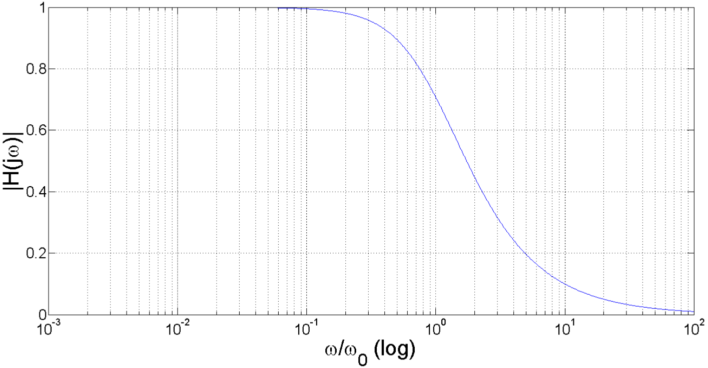
Diagramas de Bode

Módulo de $H(j\omega)$ $(\omega = 2\pi f)$



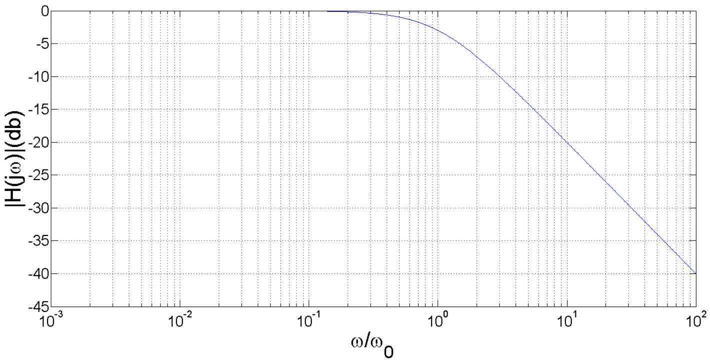
Diagramas de Bode

Módulo de $H(j\omega)$ - gráfica logarítmica en las abscisas



Diagramas de Bode

Módulo de $H(j\omega)$ - gráfica logarítmica en las abscisas y ordenadas



Diagramas de Bode

Ganancias en db

P_S/P_E	$G\ (db)$
1	0
2	3
0,5	-3
10	10
0,1	-10

Ganancias en potencia

$\lvert V_S\rvert/\lvert V_E\rvert$	$G\ (db)$
1	0
$\sqrt{2} \approx 1{,}41$	3
$\sqrt{0{,}5} \approx 0{,}70$	-3
10	20
0,1	-20

Ganancias en tensión

Diagramas de Bodex

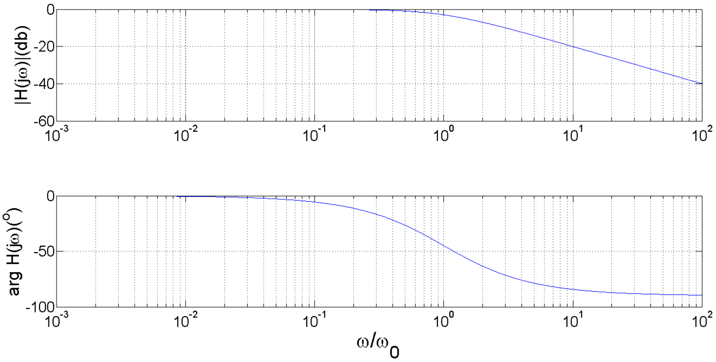
Diagramas de Bode: resumiendo

- Constituyen una representación gráfica particular de la transferencia en régimen de un sistema lineal.
- Consta de dos gráficas: el diagrama de módulo y el de fase.
- Usa escala logarítmica en las abscisas, para permitir ver mejor las distintas bandas de interés.
- Mide el módulo en db.

Diagramas de Bode

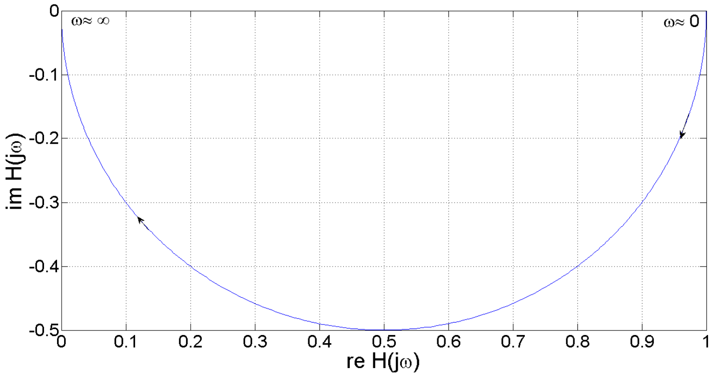
Diagramas de Bode del filtro pasabajos de primer orden

$H(j\omega) = \frac{\omega_0}{(j\omega)+\omega_0}$



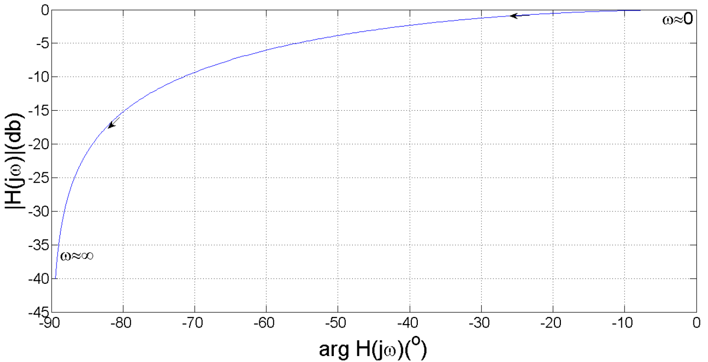
Otras representaciones

Diagrama de Nyquist del filtro pasabajos de primer orden



Otras representaciones

Diagrama de Nichols del filtro pasabajos de primer orden



Transferencia real racional

Transferencia real racional

Decimos que una transferencia $H(j\omega)$ es *real racional* si se puede expresar como el cociente de dos polinomios en $(j\omega)$ con coeficientes reales:

$$H(j\omega) = \frac{N(j\omega)}{D(j\omega)} = \frac{\sum_{k=0}^{m} b_k.(j\omega)^k}{\sum_{i=0}^{n} a_i.(j\omega)^i}$$

El *orden* de $H(j\omega)$ es el máximo de $gr(D) = n$ y $gr(N) = m$.

Además, es *propia* si $gr(D) \geq gr(N)$ y *estríctamente propia* si $gr(D) > gr(N)$.

Ejemplo

$$H(j\omega) = \frac{RC(j\omega) + 3}{LC(j\omega)^2 + \frac{L}{R}(j\omega) + 1}, \quad m = 1, \; n = 2$$

Transferencia real racional

Propiedades de $H(j\omega)$ real racional

- $H(-j\omega) = \overline{H(j\omega)}$

$$\Rightarrow \begin{cases} |H(-j\omega)| & = & |H(j\omega)| & \text{par en } \omega \\ arg(H(-j\omega)) & = & -argH(j\omega) & \text{impar en } \omega \end{cases}$$

Sale de

$$(j\omega)^p = j^p.\omega^p = \begin{cases} \pm\omega^p & \text{si} & p \text{ par,} & \text{da real} \\ \pm j\omega^p & \text{si} & p \text{ impar,} & \text{da imaginario} \end{cases} \Rightarrow$$

$$(-j\omega)^p = \begin{cases} (-1)^p(j\omega)^p = (j\omega)^p & \text{si} & p \text{ par} \\ (-1)^p(j\omega)^p = -(j\omega)^p & \text{si} & p \text{ impar} \end{cases}$$

Transferencia real racional

Propiedades de $H(j\omega)$ real racional

$\lim_{\omega\to\pm\infty} H(j\omega)$ es real.

$$\lim_{\omega\to\pm\infty} H(j\omega) = \lim_{\omega\to\pm\infty} \frac{b_m.(j\omega)^m}{a_n.(j\omega)^n} = \lim_{\omega\to\pm\infty} \frac{b_m}{a_n}.(j\omega)^{m-n}$$

$$= \begin{cases} \frac{b_m}{a_n} & , \quad \text{si } m = n \\ 0 & , \quad \text{si } m <= n \end{cases}$$

Transferencia real racional

Propiedades de $H(j\omega)$ real racional

$H(j\omega)$ puede escribirse como la cascada de transferencias elementales de primer orden.

$$H(j\omega) = \frac{N(j\omega)}{D(j\omega)} = \frac{\sum_{k=0}^{m} b_k (j\omega)^k}{\sum_{i=0}^{n} a_i (j\omega)^i} = K.\frac{\prod_{k=1}^{m}\left(1+\frac{j\omega}{z_k}\right)}{\prod_{i=1}^{n}\left(1+\frac{j\omega}{p_i}\right)}$$

siendo $-z_i$ y $-p_k$ las raíces de los polinomios N y D respectivamente (asumimos raíces no nulas; ver qué pasa si hay raíces nulas).

Transferencia real racional

Comentario sobre las raíces

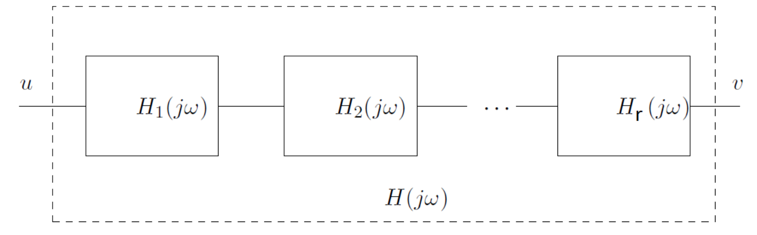
- Cuando hablamos de las raíces de $P(j\omega)$, nos referimos a hallar x tal que $P(x) = 0$.
- Por ejemplo, para $P(j\omega) = (j\omega)^2 - 2(j\omega) + 5$, hacemos

$$0 = P(x) = x^2 - 2x + 5 \Rightarrow x = \frac{2 \pm \sqrt{-16}}{2} = 1 \pm j2$$

Transferencia real racional

Propiedades de $H(j\omega)$ real racional

$H(j\omega)$ puede escribirse como la cascada de transferencias elementales de primer orden.



con $H_i(j\omega) = 1 + \frac{j\omega}{z}$ ó $H_i(j\omega) = \frac{1}{1+\frac{j\omega}{p}}$

Transferencia real racional

Propiedades de $H(j\omega)$ real racional

El módulo en decibeles y el argumento de $H(j\omega)$ quedan expresados así:

$$|H(j\omega)|_{db} = 20.\log\left|K.\frac{\prod_{k=0}^{m}\left(1+\frac{j\omega}{z_k}\right)}{\prod_{i=0}^{n}\left(1+\frac{j\omega}{p_i}\right)}\right|$$

$$|H(j\omega)|_{db} = 20\log|K| + \sum_{k=0}^{m} 20.\log\left|1+\frac{j\omega}{z_k}\right| - \sum_{i=0}^{n} 20\left|1+\frac{j\omega}{p_i}\right|$$

$$arg\ H(j\omega) = arg\ K + \sum_{k=0}^{m} arg\left(1+\frac{j\omega}{z_k}\right) - \sum_{i=0}^{n} arg\left(1+\frac{j\omega}{p_i}\right)$$

Transferencia real racional

Transferencia real racional

- Aprenderemos a realizar los diagramas de Bode de transferencias de primer orden.
- A partir de aquí, podremos enfrentar transferencias de orden cualquiera.
- Primero veremos el caso de raíces reales.
- Luego veremos el caso de raíces complejas.
- Nos centraremos en los llamados diagramas *asintóticos*.

Diagramas de Bode

Diagramas asintóticos

- Constituyen una bosquejo rápido de los diagramas de Bode.
- Capturan los aspectos más relevantes de los diagramas reales.
- Permiten obtener información cualitativa de la respuesta en frecuencia del sistema.
- Bajo ciertas condiciones, son bastante exactos y permiten obtener información cuantitativa aproximada.

Diagramas de Bode

$H(j\omega) = \frac{1}{1+\frac{j\omega}{a}}$, a real no nulo

- Sabemos que

$$|H(j\omega)| = \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{\omega^2}{a^2}}}$$

- Sólo depende del valor absoluto de a.
- Por otro lado

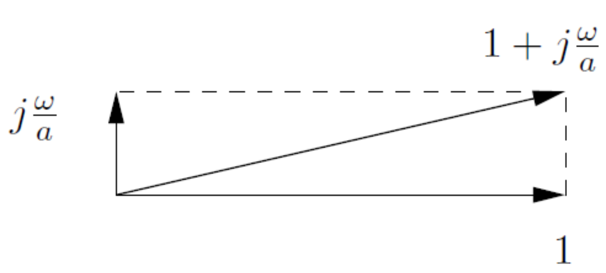
$$arg\ H(j\omega) = -atan\left(\frac{\omega}{a}\right) = atan\left(\frac{\omega}{-a}\right)$$

- El signo de a influye en la fase!!!
- De ahora en más: a positivo

Diagramas de Bode

$H(j\omega) = \frac{1}{1+\frac{j\omega}{a}}$, a real positivo

- Observemos los sumandos que aparecen en el denominador.
- Si la frecuencia de trabajo es suficientemente chica, podemos despreciar la parte imaginaria frente a la parte real:

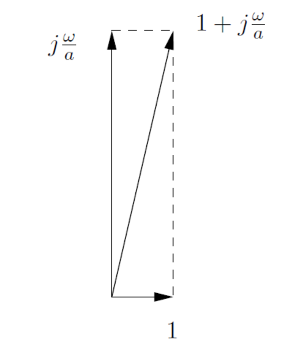


$$\boxed{1 + \frac{j\omega}{a} \approx 1}$$

Diagramas de Bode

$H(j\omega) = \frac{1}{1+\frac{j\omega}{a}}$, a real positivo

Si la frecuencia de trabajo es suficientemente grande, podemos despreciar la parte real frente a la imaginaria:



$$\boxed{1 + \frac{j\omega}{a} \approx \frac{j\omega}{a}}$$

Diagramas de Bode

$H(j\omega) = \frac{1}{1+\frac{j\omega}{a}}$, a real positivo

Frecuencia de discriminación o frecuencia crítica

- Para realizar los desprecies anteriores, lo importante es la relación entre ω y $|a|$.
- Se definen dos *bandas de frecuencia*, una alta y otra baja, separadas por $|a|$.
- Por eso le llamamos a $|a|$ la frecuencia crítica o frecuencia de corte (veremos luego el por qué de este nombre).
- Es claro que para frecuencias cercanas a $|a|$ la aproximación va a ser muy mala!!

Diagramas de Bode

$H(j\omega) = \frac{1}{1+\frac{j\omega}{a}}$, a real, positivo

Resumen

- Identificamos la frecuencia crítica $|a|$.
- Miramos la *banda de baja frecuencia*:

$$\omega \ll |a| \Rightarrow H(j\omega) \approx \frac{1}{1} = 1 \Rightarrow \left\{ \begin{array}{lcl} |H(j\omega)|_{db} & \approx & 0db \\ arg\ H(j\omega) & \approx & 0^o \end{array} \right.$$

- Miramos la *banda de alta frecuencia*:

$$\omega \gg |a| \Rightarrow H(j\omega) \approx \frac{1}{\frac{j\omega}{a}} = \frac{a}{j\omega}$$

$$\Rightarrow \left\{ \begin{array}{lcl} |H(j\omega)|_{db} & \approx & 20.\log(|a|) - 20.\log(w)db \\ arg\ H(j\omega) & \approx & -90^o \end{array} \right.$$

Diagramas de Bode

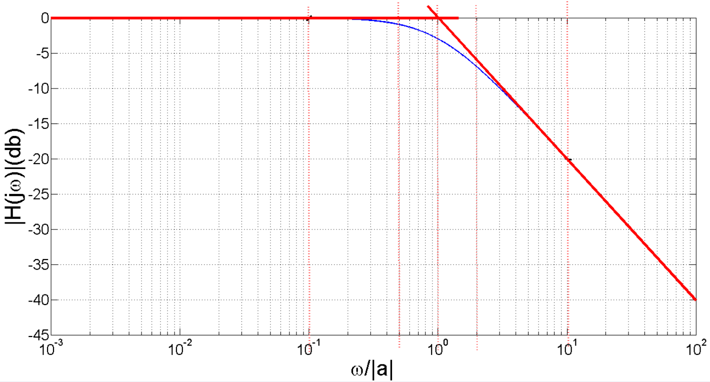
$H(j\omega) = \frac{1}{1+\frac{j\omega}{a}}$, a real, positivo

Representación gráfica del módulo

- A la banda de baja frecuencia le corresponde una ganancia constante.
- A la banda de alta frecuencia, le corresponde una recta también, ya que graficamos contra $\log(\omega)$.
- Veremos luego qué representa la pendiente de dicha recta.
- Ambas rectas se cortan en $\omega = |a|$!!!

Diagramas de Bode

Bode real y asintótico de módulo de una transferencia de primer orden estrictamente propia



Diagramas de Bode

$H(j\omega) = \frac{1}{1+\frac{j\omega}{a}}$, a real positivo

Representación gráfica del módulo

- Elijamos dos frecuencias altas, ω_1 y ω_2. Entonces

$$|H(j\omega_2)|_{db} - |H(j\omega_1)|_{db} = 20.\log\left[\frac{|H(j\omega_2)|}{|H(j\omega_1)|}\right] \approx 20.\log\left(\frac{\frac{|a|}{\omega_2}}{\frac{|a|}{\omega_1}}\right)$$

$$= 20.\log\left(\frac{\omega_1}{\omega_2}\right) = -20.\log\left(\frac{\omega_2}{\omega_1}\right)$$

- Si $\frac{\omega_2}{\omega_1} = 10$, entonces el módulo de la transferencia varía $-20.\log(10)db = -20db$.
- Decimos que la ganancia *cae* a $20db/dec$.
- Si $\frac{\omega_2}{\omega_1} = 2$, entonces el módulo de la transferencia varía $-20.\log(2)db \approx= -6db$.
- Decimos que la ganancia *cae* a $6db/oct$.

Diagramas de Bode

Distancias entre el Bode de módulo real y el asintótico

$$H_{re}(j\omega) = \frac{1}{1+\frac{j\omega}{a}} \Rightarrow |H_{re}(j\omega)| = \frac{|a|}{\sqrt{a^2+\omega^2}}$$

$$|H_{as}(j\omega)| = \begin{cases} 1 & , \quad \omega \ll |a| \\ \\ \frac{|a|}{\omega} & , \quad \omega \gg |a| \end{cases}$$

$$|H_{re}(j\omega)|_{db} - |H_{as}(j\omega)|_{db} = 20.\log\left[\frac{|H_{re}(j\omega)|}{|H_{as}(j\omega)|}\right] = 20.\log\left[\frac{\frac{|a|}{\sqrt{a^2+\omega^2}}}{|H_{as}(j\omega)|}\right]$$

Se puede estudiar analíticamente la distancia máxima entre ambas curvas.

Diagramas de Bode

Distancias entre el Bode de módulo real y el asintótico

$$|H_{re}(j\omega)|_{db} - |H_{as}(j\omega)|_{db} = 20.\log\left[\frac{|H_{re}(j\omega)|}{|H_{as}(j\omega)|}\right] = 20.\log\left[\frac{\frac{|a|}{\sqrt{a^2+\omega^2}}}{|H_{as}(j\omega)|}\right]$$

- $\omega = |a| \Rightarrow |H_{as}(j|a|)| = 1.$ Entonces

$$|H_{re}(j\omega)|_{db} - |H_{as}(j\omega)|_{db} = 20.\log\left[\frac{\frac{|a|}{\sqrt{a^2+|a|^2}}}{1}\right] = 20.\log\left[\frac{1}{\sqrt{2}}\right]$$

$$= -10\log(2) \approx \boxed{-3db}$$

Diagramas de Bode

Distancias entre el Bode de módulo real y el asintótico

$$|H_{re}(j\omega)|_{db} - |H_{as}(j\omega)|_{db} = 20.\log\left[\frac{|H_{re}(j\omega)|}{|H_{as}(j\omega)|}\right] = 20.\log\left[\frac{\frac{|a|}{\sqrt{a^2+\omega^2}}}{|H_{as}(j\omega)|}\right]$$

- $\omega = \frac{|a|}{10} \Rightarrow \left|H_{as}\left(j\frac{|a|}{10}\right)\right| = 1$. Entonces

$$\left|H_{re}\left(j\frac{|a|}{10}\right)\right|_{db} - \left|H_{as}\left(j\frac{|a|}{10}\right)\right|_{db} = 20.\log\left[\frac{\frac{|a|}{\sqrt{a^2+\frac{|a|^2}{100}}}}{1}\right] =$$

$$= 20.\log\left[\frac{\frac{10|a|}{\sqrt{100a^2+|a|^2}}}{1}\right] = 20.\log\left[\frac{10}{\sqrt{101}}\right] \approx \boxed{-0,043db}$$

Diagramas de Bode

Distancias entre el Bode de módulo real y el asintótico

$$|H_{re}(j\omega)|_{db} - |H_{as}(j\omega)|_{db} = 20.\log\left[\frac{|H_{re}(j\omega)|}{|H_{as}(j\omega)|}\right] = 20.\log\left[\frac{\frac{|a|}{\sqrt{a^2+\omega^2}}}{|H_{as}(j\omega)|}\right]$$

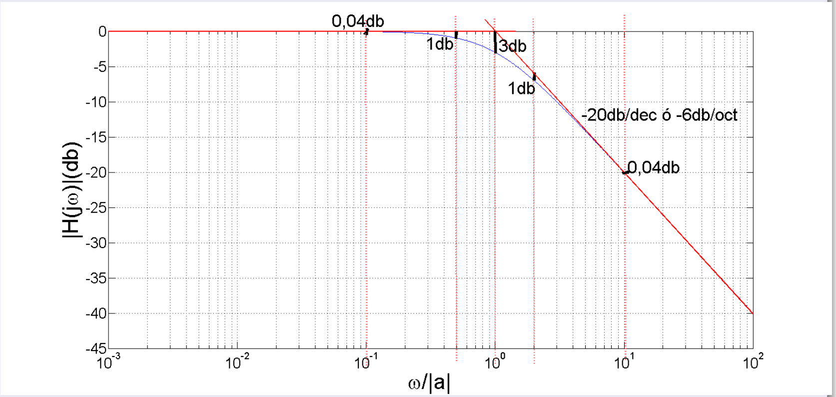
- $\omega = 2|a| \Rightarrow |H_{as}(j2|a|)| = \frac{|a|}{2|a|}$. Entonces

$$|H_{re}(j2|a|)|_{db} - |H_{as}(j2|a|)|_{db} = 20.\log\left[\frac{\frac{|a|}{\sqrt{a^2+4|a|^2}}}{\frac{1}{2}}\right] =$$

$$= 20.\log\left[\frac{2}{\sqrt{5}}\right] \approx \boxed{-1db}$$

Diagramas de Bode

Bode real y asintótico de módulo de una transferencia de primer orden estrictamente propia



Diagramas de Bode

Observaciones sobre el diagrama de Bode de módulo asintótico

- Para su construcción identificamos dos bandas de frecuencia: bajas y altas.
- La frecuencia de discriminación o corte es el módulo de la frecuencia crítica.
- El diagrama asintótico consiste en dos rectas:
  - La asíntota de baja frecuencia, constante, definida por el valor de continua ($H(j0)$).
  - La asíntota de alta frecuencia, de pendiente $-20db/dec$ ó $-6db/oct$.
- La aproximación asintótica es muy buena, sobre todo a una década por encima o por debajo de la frecuencia de corte.
- El máximo apartamiento se produce en la frecuencia de corte y vale $3db$.

Diagramas de Bode

$H(j\omega) = \frac{1}{1+\frac{j\omega}{a}}$, a real positivo

Diagrama de Bode de fase

- Para estudiar el diagrama de Bode de fase, retomamos la aproximación asintótica de antes:
- Miramos la *banda de baja frecuencia*:

$$\omega \ll |a| \Rightarrow H(j\omega) \approx \frac{1}{1} = 1 \Rightarrow \begin{cases} |H(j\omega)|_{db} & \approx & 0db \\ arg\ H(j\omega) & \approx & 0^o \end{cases}$$

- Miramos la *banda de alta frecuencia*:

$$\omega \gg |a| \Rightarrow H(j\omega) \approx \frac{1}{\frac{j\omega}{a}} = \frac{a}{j\omega}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} |H(j\omega)|_{db} & \approx & 20.\log(|a|) - 20.\log(w)db \\ arg\ H(j\omega) & \approx & -90^o \end{cases}$$

Diagramas de Bode

$H(j\omega) = \frac{1}{1+\frac{j\omega}{a}}$, a real positivo

Diagrama de Bode de fase

- Resumiendo

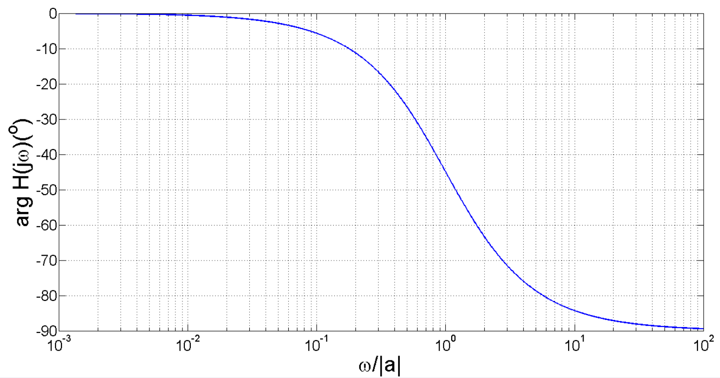
$$\omega \ll |a| \Rightarrow arg\ H(j\omega) \approx 0^o$$

$$\omega \gg |a| \Rightarrow arg\ H(j\omega) \approx -90^o$$

- Tenemos nuevamente dos rectas que aproximan el diagrama.
- Son constantes y paralelas!!!
- Si limitáramos la aproximación sólo a estas dos rectas, perderíamos la continuidad de la fase.
- Usamos esas dos rectas, pero las unimos por una tercer recta (o una curva) que refleja la continuidad de la fase.
- No haremos un análisis de distancias real-asintótico porque la aproximación es buena sólo lejos de la frecuencia de corte (al menos una década).

Transferencia real racional

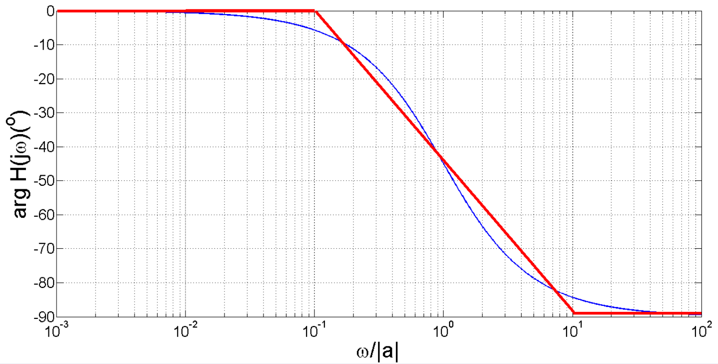
Argumento de la transferencia de primer orden $H(j\omega)$



La fase presenta una variación total de 90 grados!!!!

Transferencia real racional

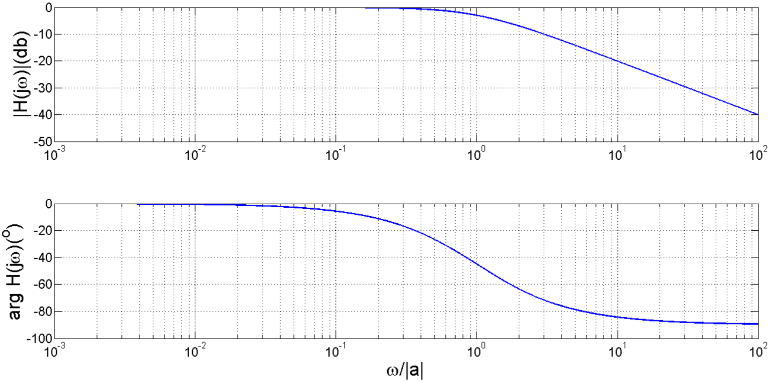
Argumento de la transferencia de primer orden $H(j\omega)$



La fase presenta una variación total de 90 grados!!!!

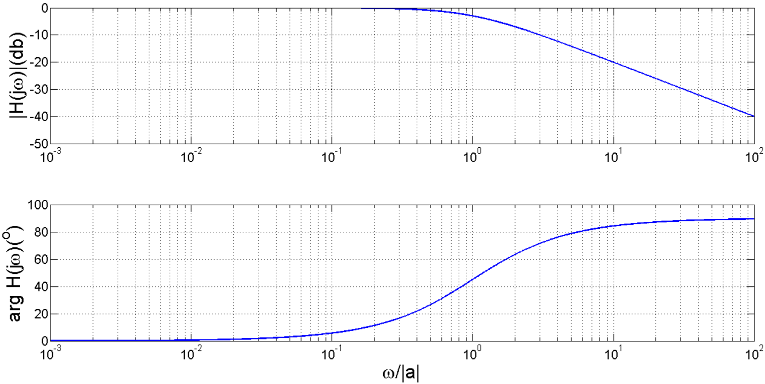
Diagramas de Bode

$$H(j\omega) = \frac{1}{1+\frac{j\omega}{a}},\ a > 0$$



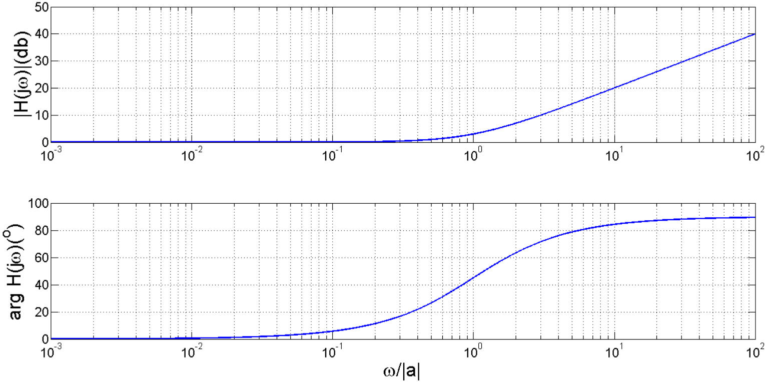
Diagramas de Bode

$$H(j\omega) = \frac{1}{1+\frac{j\omega}{a}} \ , \ \ a < 0 \Rightarrow arg\,H(j\omega) = -arg\,\frac{1}{1+\frac{j\omega}{-a}}$$



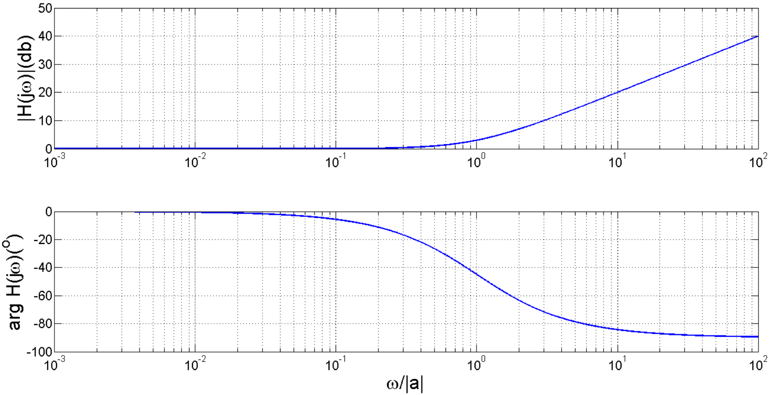
Diagramas de Bode

$$H(j\omega) = 1 + \frac{j\omega}{a} \ , \ \ a > 0 \Rightarrow H(j\omega) = \left[\frac{1}{1 + \frac{j\omega}{a}}\right]^{-1}$$



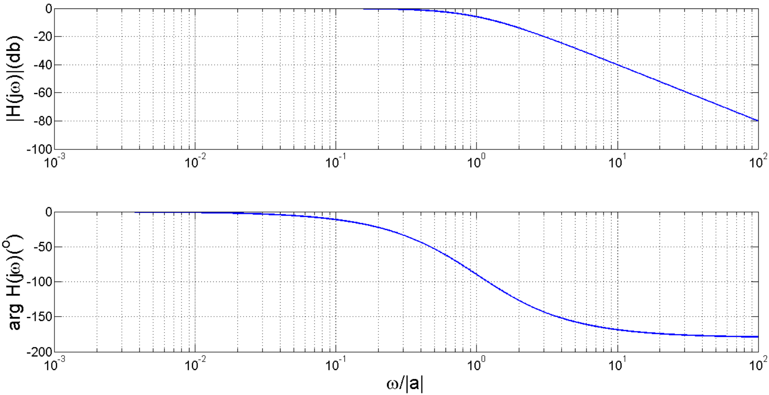
Diagramas de Bode

$$H(j\omega) = 1 + \frac{j\omega}{a} \ , \ \ a < 0 \Rightarrow H(j\omega) = \left[\frac{1}{1 + \frac{j\omega}{a}}\right]^{-1}$$



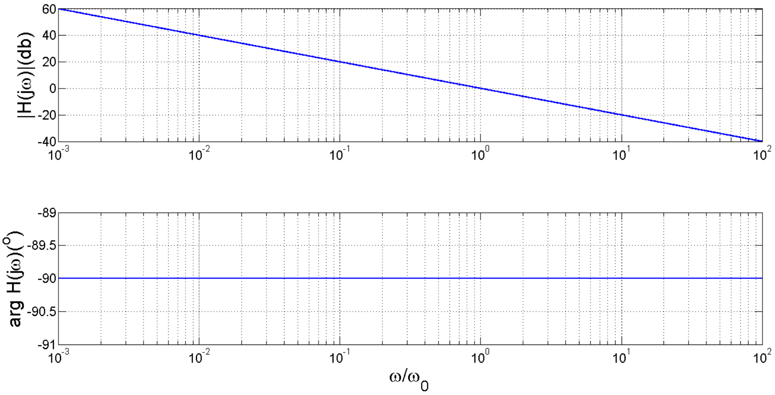
Diagramas de Bode

$$H(j\omega) = \frac{1}{\left(1 + \frac{j\omega}{a}\right)^2} \ , \ a > 0 \Rightarrow H(j\omega) = \left[\frac{1}{1 + \frac{j\omega}{a}}\right]^2$$



Diagramas de Bode

$$H(j\omega) = \frac{\omega_0}{j\omega} \quad integrador!!!$$



Transferencias de segundo orden

Transferencias de segundo orden

- Miremos ahora el caso en que hay raíces complejas.
- En este caso, vienen en parejas complejas conjugadas, y tienen el mismo módulo.
- Construyamos un polinomio (normalizado) de segundo orden, con dichas raíces z y $\bar{z}$:

$$p(x) = (x - z)(x - \bar{z}) = x^2 - (z + \bar{z})x + |z|^2 = x^2 - 2re(z)x + |z|^2$$

Transferencias de segundo orden

Transferencias de segundo orden

- Consideremos un polinomio de coeficientes reales y veamos si tiene o no raíces complejas conjugadas.
- Para ello lo escribimos de una forma estándar que viene de la física:

$$p(x) = x^2 - 2re(z)x + |z|^2 = x^2 + 2\zeta\omega_n x + \omega_n^2$$

- $\omega_n = |z| > 0$ es la frecuencia natural.
- $\zeta = -\frac{re(z)}{\omega_n}$ es el factor de amortiguamiento.
- Calculemos las raíces en función de ζ y ω_n.

$$x = \frac{2\zeta\omega_n \pm \sqrt{4\zeta^2\omega_n^2 - 4\omega_n^2}}{2} = -\zeta\omega_n \pm \omega_n\sqrt{\zeta^2 - 1}$$

- Raíces complejas $\Leftrightarrow |\zeta| < 1$ (si $\zeta = 0$ hay raíces imaginarias puras!!).

Transferencias de segundo orden

Ejemplo

- Consideremos $p(x) = x^2 - 5x + 1$.
- Directamente obtenemos $\omega_n = 1$.
- Entonces $-5 = 2\zeta\omega_n \Rightarrow \zeta = -\frac{5}{2} \Rightarrow$ raíces reales.

Ejemplo

- Consideremos $p(x) = x^2 - 5x + 10$.
- Directamente obtenemos $\omega_n = 10$.
- Entonces $-5 = 2\zeta\omega_n \Rightarrow \zeta = -\frac{5}{20} \Rightarrow$ raíces complejas.

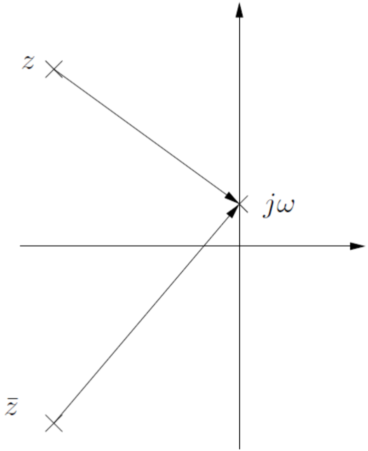
Transferencias de segundo orden

Transferencias de segundo orden

$$H(j\omega) = \frac{\omega_n^2}{(j\omega)^2 + 2\zeta\omega_n(j\omega) + \omega_n^2}$$

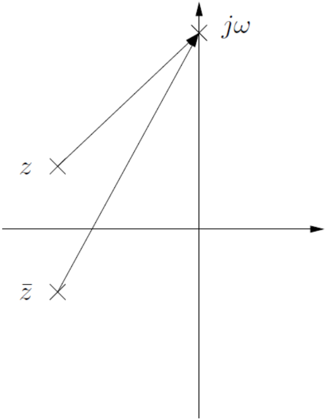
Para obtener una aproximación asintótica, veamos las posibles posiciones relativas entre $j\omega$ y las racíces del polinomio.

Diagramas de Bode



$$(j\omega - z)(j\omega - \bar{z}) \approx (z)(\bar{z}) = |z|^2 = \omega_n^2$$

Diagramas de Bode



$$(j\omega - z)(j\omega - \bar{z}) \approx (j\omega)(j\omega) = (j\omega)^2$$

Transferencias de segundo orden

$H(j\omega) = \frac{\omega_n^2}{(j\omega)^2+2\zeta\omega_n(j\omega)+\omega_n^2}$

- Miramos la *banda de baja frecuencia*:

$$\omega \ll \omega_n \Rightarrow H(j\omega) \approx \frac{\omega_n^2}{\omega_n^2} = 1 \Rightarrow \begin{cases} |H(j\omega)|_{db} & \approx & 0db \\ arg\ H(j\omega) & \approx & 0^o \end{cases}$$

- Miramos la *banda de alta frecuencia*:

$$\omega \gg \omega_n \Rightarrow H(j\omega) \approx \frac{\omega_n^2}{(j\omega)^2}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} |H(j\omega)|_{db} & \approx & 20.\log(\omega_n^2) - 40.\log(w)db \\ arg\ H(j\omega) & \approx & \pm 180^o \end{cases}$$

Transferencias de segundo orden

$H(j\omega) = \frac{\omega_n^2}{(j\omega)^2 + 2\zeta\omega_n(j\omega) + \omega_n^2}$

- Nuevamente el diagrama asintótico de módulo consta de dos rectas, una horizontal de $0db$ y la otra a $-40db/dec$, que se cortan en ω_n.
- Hay que tener cuidado con la fase, porque la aproximación asintótica nos da dos rectas horizontales, separadas 360^o.
- La fase presenta una variación total de 180 grados!!
- Para unirlas de manera continua (si corresponde) hay que ver si la fase atrasa o adelanta!!!
- Sugerencia: mirar qué pasa en $\omega = \omega_n$.

Transferencias de segundo orden

$H(j\omega) = \frac{\omega_n^2}{(j\omega)^2 + 2\zeta\omega_n(j\omega) + \omega_n^2}$

- $H(j\omega_n) = \frac{\omega_n^2}{(j\omega_n)^2 + 2\zeta\omega_n(j\omega_n) + \omega_n^2} = \frac{1}{2j\zeta}$

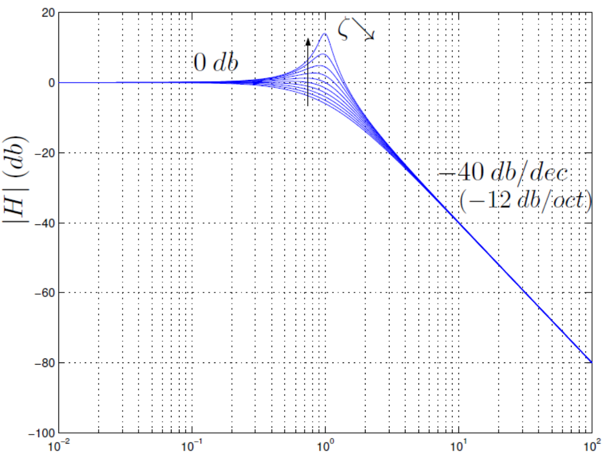
$$\Rightarrow \begin{cases} |H(j\omega_n)| & = & \frac{1}{2\zeta} \\ arg\, H(j\omega_n) & \approx & -sg(\zeta)90^o \end{cases}$$

- Todo depende del signo de ζ.
- El caso $\zeta = 0$ hay que mirarlo con cuidado.

Diagramas de Bode

$$H(j\omega) = \frac{\omega_n^2}{(j\omega)^2 + 2\zeta\omega_n(j\omega) + \omega_n^2}$$

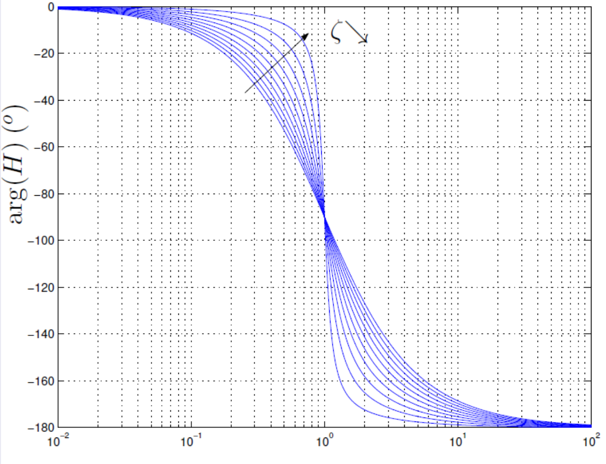
Variación del módulo con ζ



Diagramas de Bode

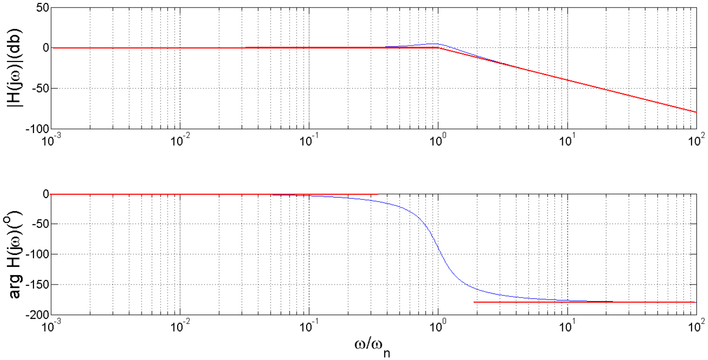
$H(j\omega) = \frac{\omega_n^2}{(j\omega)^2+2\zeta\omega_n(j\omega)+\omega_n^2}$

Variación del argumento con $\zeta > 0$



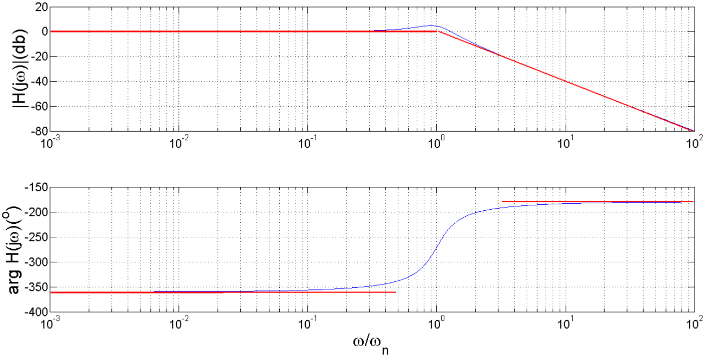
Diagramas de Bode

$$H(j\omega) = \frac{\omega_n^2}{(j\omega)^2 + 2\zeta\omega_n(j\omega) + \omega_n^2},\ \zeta > 0$$



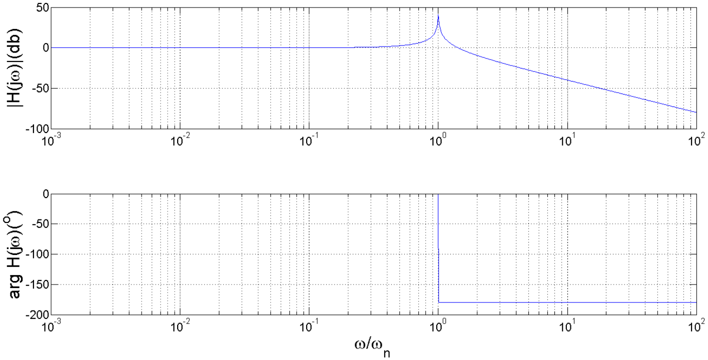
Diagramas de Bode

$H(j\omega) = \frac{\omega_n^2}{(j\omega)^2+2\zeta\omega_n(j\omega)+\omega_n^2}$, $\zeta < 0$



Diagramas de Bode

$H(j\omega) = \frac{\omega_n^2}{(j\omega)^2+\omega_n^2}$, $\zeta = 0$



Filtros activos

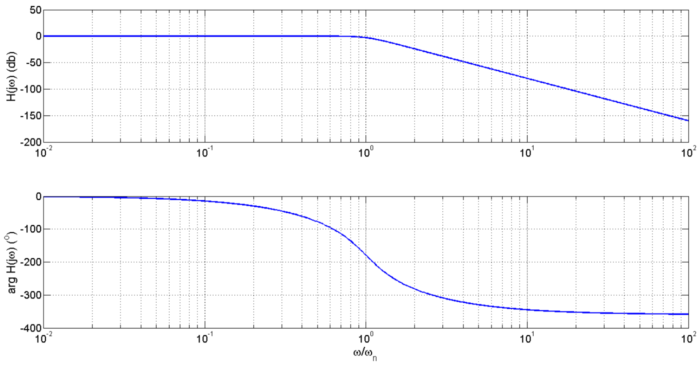
Filtros activos

- Basados en amplificadores operacionales.
- Características principales al momento de diseñar:
  - Transición abrupta
  - Banda pasante plana.
  - Fase lineal

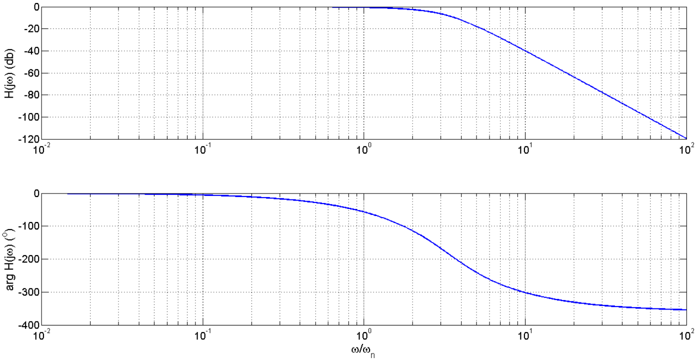
  (dos requerimientos asociados a la no distorsión, como veremos luego).
- Existen procedimientos sistemáticos para diseñar filtros que prioricen algunas de las caracteríticas anteriores.

Filtro de Butterworth pasabajos de cuarto oden (banda pasante plana)

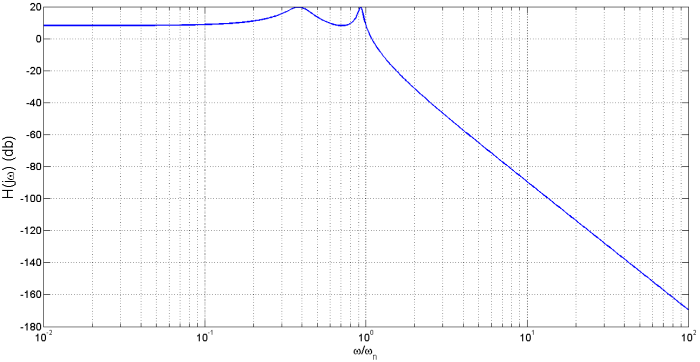
$$H(j\omega) = \frac{1}{1+2{,}6131(j\omega)+3{,}4142(j\omega)^2+2{,}6131(j\omega)^3+(j\omega)^4}$$



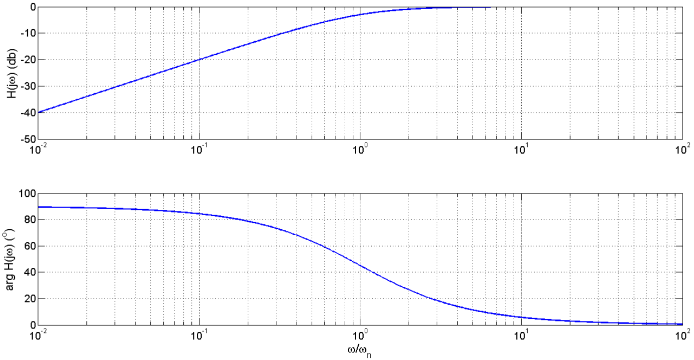
Filtro de Bessel pasabajos de cuarto orden (fase lineal)



Filtro de Chebyshev pasabajos de cuarto orden (bajada abrupta)



Filtro pasa altos de primer orden



Filtro pasabanda