Universidad de la República — **Geometría y Álgebra Lineal I**

Facultad de Ingeniería - IMERL — **Curso anual 2016**

PRIMER PARCIAL – JUEVES 28 DE ABRIL DE 2016

Cédula	Apellido y nombre

- El puntaje total es 20 puntos.
- La duración del parcial es dos horas y media.

(I) Verdadero Falso. Total: 4 puntos

Puntajes: 1 punto si la respuesta es correcta, -1 punto si la respuesta es incorrecta, 0 punto por no contestar. Indique sus respuestas (V/F) en los casilleros correspondientes.

Ejercicio 1	Ejercicio 2	Ejercicio 3	Ejercicio 4
F	**V**	**F**	**F**

Ejercicio 1: Todo sistema lineal de 4 ecuaciones con 3 incógnitas es compatible indeterminado.

Ejercicio 2: Si $A, B \in \mathcal{M}_{n\times n}$ son matrices diagonales entonces conmutan.

Ejercicio 3: Si $\{v_1, v_2, v_3\} \subset \mathbb{R}^3$ es un conjunto linealmente dependiente entonces v_3 es combinación lineal de v_1 y v_2.

Ejercicio 4: Si A es una matriz cuadrada 2×2 tal que $A^2 = 0$ entonces $A = 0$.

(II) Desarrollo. Total: 16 puntos

Ejercicio 1: (4 puntos)

Halle el conjunto solución del siguiente sistema de ecuaciones:

$$\begin{cases} 2x - y + z = 2 \\ x + 4y + 2z = 1 \\ x + y + z = 1 \\ 3x + 2z = 3 \end{cases}$$

Solución: El sistema es compatible indeterminado. El conjunto solución es:

$$Sol(S) = \{(2y+1, y, -3y) : y \in \mathbb{R}\}.$$

O lo que es lo mismo, escrito en términos de las otras variables:

$$Sol(S) = \left\{ \left(1 - \frac{2}{3}z, -\frac{1}{3}z, z\right) : z \in \mathbb{R} \right\} \quad , \quad Sol(S) = \left\{ \left(x, -\frac{1}{2} + \frac{1}{2}x, \frac{3}{2} - \frac{3}{2}x\right) : x \in \mathbb{R} \right\}.$$

Ejercicio 2: (4 puntos)

Pruebe que si $A, B \in \mathcal{M}_{n\times n}$ son matrices invertibles entonces AB también es invertible (obteniendo explícitamente la matriz inversa).

Solución: Se cumple:

$$(AB)(B^{-1}A^{-1}) = A(BB^{-1})A^{-1} = AA^{-1} = \mathbb{I}.$$

Análogamente:

$$(B^{-1}A^{-1})(AB) = B^{-1}(A^{-1}A)B = B^{-1}B = \mathbb{I}.$$

De manera que AB es invertible y $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$.

Ejercicio 3: (4 puntos)

Considere el conjunto de 3-uplas $\mathcal{B} = \{(1,0,-1),(2,1,1),(-1,-2,-5)\}$.

i) Investigue si la 3-upla $(3,3,2)$ puede escribirse como combinación lineal de los elementos de $\mathcal{B}$.

ii) Halle las condiciones que debe cumplir una 3-upla (a,b,c) para escribirse como combinación lineal de los elementos del conjunto $\mathcal{B}$.

Solución:

i) $(3,3,2)$ **no** puede escribirse como combinación lineal de los elementos de $\mathcal{B}$.

ii) Condición: $a + c - 3b = 0$.

Ejercicio 4: (4 puntos)

La inversa de la matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ es:

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{3} & 0 & \frac{2}{3} \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ \frac{2}{3} & 0 & -\frac{1}{3} \end{pmatrix}.$$