Examen de Lógica

11 de febrero de 2025

Indicaciones generales

- Apagar los celulares.
- La duración del examen es de **tres (3)** horas.
- En esta prueba **no** se permite consultar material alguno.
- **Toda respuesta debe estar fundamentada.** Pueden usarse los resultados que aparecen en el texto del curso, en esos casos debe describirse con precisión el enunciado que se utiliza.
- Numerar todas las hojas e incluir en cada una su nombre y cédula de identidad, utilizar las hojas de un solo lado, escribir con lápiz, iniciar cada ejercicio en hoja nueva y poner en la primera hoja la cantidad de hojas entregadas.

Ejercicio 1(25 puntos)

Considere un alfabeto $\Sigma = \{a, b, c\}$ y el lenguaje $\mathcal{L}$ definido inductivamente por las siguientes reglas:

i $\epsilon \in \mathcal{L}$

ii Si $w \in \mathcal{L}$ entonces $baw \in \mathcal{L}$

iii Si $w \in \mathcal{L}$ entonces $wcb \in \mathcal{L}$

a. Defina recursivamente la función $cantSimb : \mathcal{L} \times \Sigma \to \mathbb{N}$, de forma tal que $cantSimb(w, x)$ cuenta las ocurrencias del símbolo x en la tira w.
Ejemplos:
   - $cantSimb(babacb, a) = 2$
   - $cantSimb(bacb, b) = 2$
   - $cantSimb(bacbcb, c) = 2$

b. Para cada una de las siguientes afirmaciones indique si es verdadera o falsa. En caso de ser verdadera demuestre inductivamente y en caso de ser falsa de un contraejemplo.
   - I. $(\bar{\forall} w \in \mathcal{L})(cantSimb(w, a) = cantSimb(w, b))$
   - II. $(\bar{\forall} w \in \mathcal{L})(cantSimb(w, b) = 2.cantSimb(w, c))$
   - III. $(\bar{\forall} w \in \mathcal{L})(cantSimb(w, b) = cantSimb(w, a) + cantSimb(w, c))$
   - IV. $(\bar{\forall} w \in \mathcal{L})(cantSimb(w, a) \geq cantSimb(w, c))$

Propuesta de solución

a. Defina recursivamente la función $cantSimb : \mathcal{L} \times \Sigma \to \mathbb{N}$, de forma tal que $cantSimb(w, x)$ cuenta las ocurrencias del símbolo x en la tira w.

$$
\begin{array}{ll}
cantSimb(\epsilon, x) & = 0, \text{ para cualquier x} \in \Sigma \\
cantSimb(baw, x) & = \text{si } (x = b \text{ or } x = a) \text{ entonces } 1 + cantSimb(w, x) \text{ sino } cantSimb(w, x) \\
cantSimb(wcb, x) & = \text{si } (x = b \text{ or } x = c) \text{ entonces } 1 + cantSimb(w, x) \text{ sino } cantSimb(w, x)
\end{array}
$$

b. Para cada una de las siguientes afirmaciones indique si es verdadera o falsa. En caso de ser verdadera demuestre inductivamente y en caso de ser falsa de un contraejemplo.

I. $(\bar{\forall} w \in \mathcal{L})(cantSimb(w,a) = cantSimb(w,b))$ **FALSA**

Contraejemplo: bacb

- $cantSimb(bacb,a) = 1$
- $cantSimb(bacb,b) = 2$

II. $(\bar{\forall} w \in \mathcal{L})(cantSimb(w,b) = 2.cantSimb(w,c))$ **FALSA**

Contraejemplo: ba

- $cantSimb(ba,b) = 1$
- $cantSimb(ba,c) = 0$

III. $(\bar{\forall} w \in \mathcal{L})(cantSimb(w,b) = cantSimb(w,a) + cantSimb(w,c))$**VERDADERA**

Se probará usando el PIP para $\mathcal{L}$.
Identificación de la propiedad:

$$P(w) := cantSimb(w,b) = cantSimb(w,a) + cantSimb(w,c)$$

Paso Base

T) $P(\epsilon) := cantSimb(\epsilon,b) = cantSimb(\epsilon,a) + cantSimb(\epsilon,c)$
Demo)

$$\begin{aligned}
& cantSimb(\epsilon,b) \\
& = \text{(def. de cantSimb)} \\
& 0 \\
& = \text{(aritmética)} \\
& 0+0 \\
& = \text{(def. de cantSimb)} \\
& cantSimb(\epsilon,a) + cantSimb(\epsilon,c)
\end{aligned}$$

Paso Inductivo 1

H) $P(w) : cantSimb(w,b) = cantSimb(w,a) + cantSimb(w,c)$
T) $P(baw) : cantSimb(baw,b) = cantSimb(baw,a) + cantSimb(baw,c)$
Demo)

$$\begin{aligned}
& cantSimb(baw,b) \\
& = \text{(def. de cantSimb)} \\
& 1 + cantSimb(w,b) \\
& = \text{(H)} \\
& 1 + cantSimb(w,a) + cantSimb(w,c) \\
& = \text{(def. de cantSimb)} \\
& cantSimb(baw,a) + cantSimb(w,c) \\
& = \text{(def. de cantSimb)} \\
& cantSimb(baw,a) + cantSimb(baw,c)
\end{aligned}$$

Paso Inductivo 2

H) $P(w) : cantSimb(w,b) = cantSimb(w,a) + cantSimb(w,c)$

T) $P(wcb) : cantSimb(wcb, b) = cantSimb(wcb, a) + cantSimb(wcb, c)$
Demo)

$$
\begin{aligned}
& cantSimb(wcb, b) \\
& = \text{(def. de cantSimb)} \\
& 1 + cantSimb(w, b) \\
& = \text{(H)} \\
& 1 + cantSimb(w, a) + cantSimb(w, c) \\
& = \text{(def. de cantSimb)} \\
& cantSimb(w, a) + cantSimb(wcb, c) \\
& = \text{(def. de cantSimb)} \\
& cantSimb(wcb, a) + cantSimb(wcb, c)
\end{aligned}
$$

Como nos encontramos bajo las hipotesis del PIP para $\mathcal{L}$, podemos afirmar que

$$(\bar{\forall} w \in \mathcal{L})(cantSimb(w, b) = cantSimb(w, a) + cantSimb(w, c))$$

IV. $(\bar{\forall} w \in \mathcal{L})(cantSimb(w, a) \geq cantSimb(w, c))$ **FALSA**

Contraejemplo: cb

- $cantSimb(cb, a) = 0$
- $cantSimb(cb, c) = 1$

Ejercicio 2 (25 puntos)

Se considera un lenguaje de primer orden con igualdad, con tipo de similaridad $\langle -; 1; 0\rangle$, con símbolo de función f.

Sean las fórmulas:

- $\varphi := (\forall x)(\forall y)(f(x) =' y \rightarrow f(y) =' x)$
- $\psi := (\forall x)\neg f(x) =' x$

Indique si las siguientes afirmaciones son verdaderas o falsas. Justifique.

a. Existe F_1 tal que $M_1 = \langle\{\circ\}, F_1\rangle$ cumple que $M_1 \models \varphi$ y $M_1 \models \psi$.
b. Existe F_2 tal que $M_2 = \langle\{\circ, \bullet\}, F_2\rangle$ cumple que $M_2 \models \varphi$ y $M_2 \models \psi$.
c. Existe F_3 tal que $M_3 = \langle\{\circ, \bullet, \triangle\}, F_3\rangle$ cumple que $M_3 \models \varphi$ y $M_3 \models \psi$.
d. Existe F_4 tal que $M_4 = \langle\{\circ, \bullet, \triangle\}, F_4\rangle$ cumple que $M_4 \models \varphi$.

Propuesta de solución

Veamos qué debe cumplir una estructura para que sea modelo de φ y ψ. Sea $M = \langle U, F\rangle$ una estructura del tipo adecuado genérica con universo U y función F.

$$
\begin{aligned}
& M \models \varphi \\
& \Leftrightarrow \text{(Def. de } \varphi) \\
& M \models (\forall x)(\forall y)(f(x) =' y \rightarrow f(y) =' x) \\
& \Leftrightarrow \text{(2.4.5)} \\
& (\bar{\forall} a \in U)(\bar{\forall} b \in U) M \models f(\bar{a}) =' \bar{b} \rightarrow f(\bar{b}) =' \bar{a} \\
& \Leftrightarrow \text{(2.4.5)} \\
& (\bar{\forall} a \in U)(\bar{\forall} b \in U)(M \models f(\bar{a}) =' \bar{b} \Rightarrow M \models f(\bar{b}) =' \bar{a}) \\
& \Leftrightarrow \text{(Def. de } \models) \\
& (\bar{\forall} a \in U)(\bar{\forall} b \in U)(v^M(f(\bar{a}) =' \bar{b}) = 1 \Rightarrow v^M(f(\bar{b}) =' \bar{a}) = 1) \\
& \Leftrightarrow \text{(Def. de } M \text{ y } v^M) \\
& (\bar{\forall} a \in U)(\bar{\forall} b \in U)(F(a) = b \Rightarrow F(b) = a) \ \textbf{(A)}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
& M \models \psi \\
& \Leftrightarrow \text{(Def. de } \psi) \\
& M \models (\forall x)\neg f(x) =' x \\
& \Leftrightarrow \text{(2.4.5)} \\
& (\bar{\forall} a \in U) M \models \neg f(\bar{a}) =' \bar{a} \\
& \Leftrightarrow \text{(2.4.5)} \\
& (\bar{\forall} a \in U) M \not\models f(\bar{a}) =' \bar{a} \\
& \Leftrightarrow \text{(Def. de } \models) \\
& (\bar{\forall} a \in U) v^M(f(\bar{a}) =' \bar{a}) = 0 \\
& \Leftrightarrow \text{(Def. de } M \text{ y } v^M) \\
& (\bar{\forall} a \in U) F(a) \neq a \ \textbf{(B)}
\end{aligned}
$$

a. Existe F_1 tal que $M_1 = \langle\{\circ\}, F_1\rangle$ cumple que $M_1 \models \varphi$ y $M_1 \models \psi$. **FALSA**

   Observamos que la estructura tiene un solo elemento, por lo que F_1 solamente puede ser la función identidad. Esta función no cumple con (B), por lo que $M_1 \not\models \psi$.

b. Existe F_2 tal que $M_2 = \langle\{\circ, \bullet\}, F_2\rangle$ cumple que $M_2 \models \varphi$ y $M_2 \models \psi$. **VERDADERA**

Sea $F_2 : \{\circ, \bullet\} \to \{\circ, \bullet\}$ tal que $F_2(\circ) = \bullet$ y $F_2(\bullet) = \circ$.

Veamos que $M_2 \models \varphi$.

$$\begin{array}{l} M_2 \models \varphi \\ \Leftrightarrow \text{((A))} \\ (\bar{\forall} a \in \{\circ, \bullet\})(\bar{\forall} b \in \{\circ, \bullet\})(F_2(a) = b \Rightarrow F_2(b) = a) \end{array}$$

- Si $a = b$, no se cumple el antecedente, por lo que se cumple el implica.
- Si $a \neq b$, como $F_2(\circ) = \bullet$ y $F_2(\bullet) = \circ$, se cumple el implica.

Veamos que $M_2 \models \psi$.

$$\begin{array}{l} M_2 \models \psi \\ \Leftrightarrow \text{((B))} \\ (\bar{\forall} a \in \{\circ, \bullet\}) F_2(a) \neq a \end{array}$$

Se cumple por la definición de F_2.

c. Existe F_3 tal que $M_3 = \langle\{\circ, \bullet, \triangle\}, F_3\rangle$ cumple que $M_3 \models \varphi$ y $M_3 \models \psi$. **FALSA**

Supongamos que existe F_3 que cumple las condiciones y realicemos un análisis de casos según el valor de $F_3(\circ)$.

- Si $F_3(\circ) = \circ$, no se cumple (B).
- Si $F_3(\circ) = \bullet$, por (A), $F_3(\bullet) = \circ$. Luego:
  - Si $F_3(\triangle) = \triangle$, no se cumple (B).
  - Si $F_3(\triangle) = \circ$, por (A), $F_3(\circ) = \triangle$, lo que contradice $F_3(\circ) = \bullet$.
  - Si $F_3(\triangle) = \bullet$, por (A), $F_3(\bullet) = \triangle$, lo que contradice $F_3(\bullet) = \circ$.
- Si $F_3(\circ) = \triangle$, por (B), $F_3(\triangle) = \circ$. Luego:
  - Si $F_3(\bullet) = \bullet$, no se cumple (B).
  - Si $F_3(\bullet) = \circ$, por (A), $F_3(\circ) = \bullet$, lo que contradice $F_3(\circ) = \triangle$.
  - Si $F_3(\bullet) = \triangle$, por (A), $F_3(\triangle) = \bullet$, lo que contradice $F_3(\triangle) = \circ$.

Como todos los casos llevan a una contradicción, no existe F_3 que cumpla con las condiciones.

d. Existe F_4 tal que $M_4 = \langle\{\circ, \bullet, \triangle\}, F_4\rangle$ cumple que $M_4 \models \varphi$. **VERDADERA**

Sea F_4 la función identidad.

Veamos que $M_4 \models \varphi$.

$$\begin{array}{l} M_4 \models \varphi \\ \Leftrightarrow \text{((A))} \\ (\bar{\forall} a \in \{\circ, \bullet, \triangle\})(\bar{\forall} b \in \{\circ, \bullet, \triangle\})(F_4(a) = b \Rightarrow F_4(b) = a) \end{array}$$

- Si $a = b$, $F_4(a) = a = b = F_4(b)$ por lo que se cumple el implica.
- Si $a \neq b$, como F_4 es la función identidad no se cumple el antecedente, por lo que se cumple el implica.

Ejercicio 3 (25 puntos)

Construya derivaciones que justifiquen los siguientes juicios:

a. $\vdash (\alpha \leftrightarrow \neg\beta) \to (\neg(\alpha \wedge \beta) \wedge (\alpha \vee \beta))$
b. $(\forall x)f(x) =' g(x) \vdash \neg(\exists x)(\neg f(g(x)) =' f(x) \wedge f(x) =' x)$

Nota: En ningún caso se aceptan justificaciones semánticas.

Propuesta de solución

a.

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{[\alpha \leftrightarrow \neg\beta]^1 \quad \dfrac{[\alpha \wedge \beta]^2}{\alpha}\,E\wedge}{\neg\beta}\,E\leftrightarrow \quad \dfrac{[\alpha \wedge \beta]^2}{\beta}\,E\wedge}{\bot}\,E\neg}{\neg(\alpha \wedge \beta)}\,I\neg(2) \quad \dfrac{\dfrac{[\neg(\alpha \vee \beta)]^3 \quad \dfrac{\dfrac{\dfrac{[\neg(\alpha \vee \beta)]^3 \quad \dfrac{\dfrac{[\alpha \leftrightarrow \neg\beta]^1 \quad [\neg\beta]^4}{\alpha}\,E\leftrightarrow}{\alpha \vee \beta}\,I\vee}{\bot}\,E\neg}{\beta}\,RAA(4)}{\alpha \vee \beta}\,I\vee}{\bot}\,E\neg}{\alpha \vee \beta}\,RAA(3)}{(\neg(\alpha \wedge \beta) \wedge (\alpha \vee \beta))}\,I\wedge}{(\alpha \leftrightarrow \neg\beta) \to (\neg(\alpha \wedge \beta) \wedge (\alpha \vee \beta))}\,I\to(1)$$

b.

$$\dfrac{\dfrac{[(\exists x)(\neg f(g(x)) =' f(x) \wedge f(x) =' x)]^1 \quad \dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{(\forall x)f(x) =' g(x)}{f(x) =' g(x)}\,E\forall^{*}}{g(x) =' f(x)}\,RI2 \quad \dfrac{[\neg f(g(x)) =' f(x) \wedge f(x) =' x]^2}{f(x) =' x}\,E\wedge}{g(x) =' x}\,RI3 \quad \dfrac{[\neg f(g(x)) =' f(x) \wedge f(x) =' x]^2}{\neg f(g(x)) =' f(x)}\,E\wedge}{\neg f(x) =' f(x)}\,RI4^{**} \quad \dfrac{}{f(x) =' f(x)}\,RI1}{\bot}\,E\neg}{\bot}\,E\exists(2)^{***}}{\neg(\exists x)(\neg f(g(x)) =' f(x) \wedge f(x) =' x)}\,I\neg(1)$$

$(*)$ x libre para x en $f(x) =' g(x)$
$(**)$ $g(x)$ y x libres para z en $\neg f(z) =' f(x)$
$(***)$ $x \notin FV(\{\bot, (\forall x)f(x) =' g(x)\})$

Ejercicio 4 (25 puntos)

Sea un lenguaje de primer orden con tipo de similaridad $\langle 2, 1; -; 0\rangle$, con símbolos de predicado P y Q. Considere las siguientes fórmulas:

$$\begin{array}{lcl} \varphi & := & (\forall x)P(x,x) \\ \psi & := & (\forall y)(\exists x)P(x,y) \end{array}$$

Demuestre las siguientes afirmaciones:

a. $Mod(\varphi) \cap Mod(\psi) \neq \emptyset$.
b. $(\bar{\exists}\mathcal{M})\mathcal{M} \notin Mod(\varphi) \cup Mod(\psi)$.
c. El conjunto $\textsc{Cons}(\varphi)$ no es consistente maximal.

Propuesta de solución

Primero verificaremos qué debe cumplir una estructura $M = \langle U, R_1, R_2\rangle$ para modelar cada fórmula.

$$\begin{array}{l} M \models \varphi \\ \Leftrightarrow \text{(Def. de } \varphi) \\ M \models (\forall x)P(x,x) \\ \Leftrightarrow \text{(2.4.5)} \\ (\bar{\forall} a \in U)M \models P(\bar{a},\bar{a}) \\ \Leftrightarrow \text{(Def. de } M \text{ y } \models) \\ (\bar{\forall} a \in U)(a,a) \in R_1 \end{array}$$

Por lo tanto $M \models \varphi \Leftrightarrow (\bar{\forall} a \in U)(a,a) \in R_1$ **(A)**

Para ψ:

$$\begin{array}{l} M \models \psi \\ \Leftrightarrow \text{(Def. de } \psi) \\ M \models (\forall y)(\exists x)P(x,y) \\ \Leftrightarrow \text{(2.4.5)} \\ (\bar{\forall} a \in U)M \models (\exists x)P(x,\bar{a}) \\ \Leftrightarrow \text{(2.4.5)} \\ (\bar{\forall} a \in U)(\bar{\exists} b \in U)M \models P(\bar{b},\bar{a}) \\ \Leftrightarrow \text{(Def. de } M \text{ y } \models) \\ (\bar{\forall} a \in U)(\bar{\exists} b \in U)(b,a) \in R_1 \end{array}$$

Por lo tanto $M \models \psi \Leftrightarrow (\bar{\forall} a \in U)(\bar{\exists} b \in U)(b,a) \in R_1$ **(B)**

a. Sea $M_a = \langle \{\circ\}, \{(\circ,\circ)\}, \{\circ\}\rangle$. Para esta estructura se cumple:

$$\begin{array}{l} (\circ,\circ) \in \{(\circ,\circ)\} \\ \Rightarrow \text{(Def. de } M_a) \\ (\bar{\forall} a \in \{\circ\})(a,a) \in \{(\circ,\circ)\} \\ \Rightarrow \textbf{(A)} \\ M_a \models \varphi \\ \Rightarrow \text{(Def. de } Mod) \\ M_a \in Mod(\varphi) \end{array}$$

Por otra parte:

$$
\begin{aligned}
&(\circ, \circ) \in \{(\circ, \circ)\} \\
&\Rightarrow \text{(Def. de } M_a\text{)} \\
&(\bar{\forall} a \in \{\circ\})(\circ, a) \in \{(\circ, \circ)\} \\
&\Rightarrow \text{(Def. de } M_a\text{, tomando } b = \circ \text{ como testigo)} \\
&(\bar{\forall} a \in \{\circ\})(\bar{\exists} b \in \{\circ\})(b, a) \in \{(\circ, \circ)\} \\
&\Rightarrow (\mathbf{B}) \\
&M_a \models \psi \\
&\Rightarrow \text{(Def. de } Mod\text{)} \\
&M_a \in Mod(\psi)
\end{aligned}
$$

Por lo tanto, $Mod(\varphi) \cap Mod(\psi) \neq \emptyset$, ya que M_a pertenece a la intersección.

b. Sea $M_b = \langle \{\circ\}, \emptyset, \emptyset \rangle$. Para esta estructura se cumple:

$$
\begin{aligned}
&(\circ, \circ) \notin \emptyset \\
&\Rightarrow \text{(Def. de } M_b\text{, tomando } a = \circ\text{)} \\
&(\bar{\exists} a \in \{\circ\})(a, a) \notin \emptyset \\
&\Rightarrow (\mathbf{A}) \\
&M \not\models \varphi \\
&\Rightarrow \text{(Def. de } Mod\text{)} \\
&M_b \notin Mod(\varphi)
\end{aligned}
$$

Por otra parte:

$$
\begin{aligned}
&(\circ, \circ) \notin \emptyset \\
&\Rightarrow \text{(Def. de } M_b\text{)} \\
&(\bar{\forall} b \in \{\circ\})(b, \circ) \notin \emptyset \\
&\Rightarrow \text{(Def. de } M_b\text{, tomando } a = \circ\text{)} \\
&(\bar{\exists} a \in \{\circ\})(\bar{\forall} b \in \{\circ\})(b, a) \notin \emptyset \\
&\Rightarrow \text{(Contrarecíproco de } (\mathbf{B})\text{)} \\
&M \not\models \psi \\
&\Rightarrow \text{(Def. de } Mod\text{)} \\
&M_b \notin Mod(\psi)
\end{aligned}
$$

Por lo tanto $M_b \notin Mod(\varphi) \cup Mod(\psi)$.

c. El conjunto $\textsc{Cons}(\varphi)$ es consistente maximal si y sólo si es consistente y

$$(\bar{\forall} \alpha \in \texttt{SENT})(\alpha \notin \textsc{Cons}(\varphi) \Rightarrow \textsc{Cons}(\varphi) \cup \{\alpha\} \vdash \bot)$$

Sea $\alpha = (\forall x)Q(x)$. Para que una estructura $M = \langle U, R_1, R_2 \rangle$ modele α, debe cumplir:

$$
\begin{aligned}
&M \models \alpha \\
&\Leftrightarrow \text{(Def. de } \alpha\text{)} \\
&M \models (\forall x)Q(x) \\
&\Leftrightarrow (2.4.5) \\
&(\bar{\forall} a \in U) M \models Q(\bar{a}) \\
&\Leftrightarrow \text{(Def. de } M \text{ y } \models\text{)} \\
&(\bar{\forall} a \in U) a \in R_2
\end{aligned}
$$

Por lo tanto $M \models \alpha \Leftrightarrow (\bar{\forall} a \in U) a \in R_2$ **(C)**

Consideremos ahora $M_c = \langle \{\circ\}, \{(\circ, \circ)\}, \emptyset \rangle$. Por un lado:

$$
\begin{array}{l}
(\circ, \circ) \in \{(\circ, \circ)\} \\
\Rightarrow \text{(Def. de } M_c\text{)} \\
(\bar{\forall} a \in \{\circ\})(a, a) \in \{(\circ, \circ)\} \\
\Rightarrow (\mathbf{A}) \\
M_c \models \varphi
\end{array}
$$

Por otra parte:

$$
\begin{array}{l}
\circ \notin \emptyset \\
\Rightarrow \text{(Def. de } M_c\text{, tomando } a = \circ\text{)} \\
(\bar{\exists} a \in \{\circ\}) a \notin \emptyset \\
\Rightarrow (\textbf{contrarecíproco de (C)}) \\
M_c \not\models \alpha \\
\Rightarrow (M_c \models \varphi) \\
(\bar{\exists} M)(M \models \varphi \text{ y } M \not\models \alpha) \\
\Rightarrow \text{(Def. } \models\text{)} \\
\varphi \not\models \alpha \\
\Rightarrow \text{(Corrección)} \\
\varphi \nvdash \alpha \\
\Rightarrow \text{(Def. de } \textsc{Cons}\text{)} \\
\alpha \notin \textsc{Cons}(\varphi)
\end{array}
$$

Si consideramos la estructura M_a, en la parte a mostramos que $M_a \models \varphi$, por lo tanto (por corrección), $M_a \models \textsc{Cons}(\varphi)$. Además:

$$
\begin{array}{l}
\circ \in \{\circ\} \\
\Rightarrow \text{(Def. de } M_a\text{)} \\
(\bar{\forall} a \in \{\circ\}) a \in \{\circ\} \\
\Rightarrow (\mathbf{C}) \\
M_a \models \alpha \\
\Rightarrow (M_a \models \textsc{Cons}(\varphi)) \\
M_a \models \textsc{Cons}(\varphi) \cup \{\alpha\} \\
\Rightarrow \text{(Def. de consistencia)} \\
\textsc{Cons}(\varphi) \cup \{\alpha\} \nvdash \bot
\end{array}
$$

Como encontramos una sentencia α que no pertenece a $\textsc{Cons}(\varphi)$ pero tal que el conjunto $\textsc{Cons}(\varphi) \cup \{\alpha\}$ es consistente, queda demostrado que $\textsc{Cons}(\varphi)$ no es consistente maximal.