# Examen de Lógica

**11 de febrero de 2025**

**Indicaciones generales**

- Apagar los celulares.
- La duración del examen es de **tres (3)** horas.
- En esta prueba **no** se permite consultar material alguno.
- **Toda respuesta debe estar fundamentada.** Pueden usarse los resultados que aparecen en el texto del curso, en esos casos debe describirse con precisión el enunciado que se utiliza.
- Numerar todas las hojas e incluir en cada una su nombre y cédula de identidad, utilizar las hojas de un solo lado, escribir con lápiz, iniciar cada ejercicio en hoja nueva y poner en la primera hoja la cantidad de hojas entregadas.

## Ejercicio 1(25 puntos)

Considere un alfabeto $\Sigma = \{a, b, c\}$ y el lenguaje $\mathcal{L}$ definido inductivamente por las siguientes reglas:

i $\epsilon \in \mathcal{L}$

ii Si $w \in \mathcal{L}$ entonces $baw \in \mathcal{L}$

iii Si $w \in \mathcal{L}$ entonces $wcb \in \mathcal{L}$

a. Defina recursivamente la función $cantSimb : \mathcal{L} \times \Sigma \to \mathbb{N}$, de forma tal que $cantSimb(w, x)$ cuenta las ocurrencias del símbolo $x$ en la tira $w$.
Ejemplos:

- $cantSimb(babacb, a) = 2$
- $cantSimb(bacb, b) = 2$
- $cantSimb(bacbcb, c) = 2$

b. Para cada una de las siguientes afirmaciones indique si es verdadera o falsa. En caso de ser verdadera demuestre inductivamente y en caso de ser falsa de un contraejemplo.

I. $(\bar{\forall} w \in \mathcal{L})(cantSimb(w, a) = cantSimb(w, b))$
II. $(\bar{\forall} w \in \mathcal{L})(cantSimb(w, b) = 2.cantSimb(w, c))$
III. $(\bar{\forall} w \in \mathcal{L})(cantSimb(w, b) = cantSimb(w, a) + cantSimb(w, c))$
IV. $(\bar{\forall} w \in \mathcal{L})(cantSimb(w, a) \geq cantSimb(w, c))$

# Ejercicio 2 (25 puntos)

Se considera un lenguaje de primer orden con igualdad, con tipo de similaridad $\langle -; 1; 0\rangle$, con símbolo de función $f$.

Sean las fórmulas:

- $\varphi := (\forall x)(\forall y)(f(x) =' y \to f(y) =' x)$
- $\psi := (\forall x)\neg f(x) =' x$

Indique si las siguientes afirmaciones son verdaderas o falsas. Justifique.

a. Existe $F_1$ tal que $M_1 = \langle\{\circ\}, F_1\rangle$ cumple que $M_1 \models \varphi$ y $M_1 \models \psi$.
b. Existe $F_2$ tal que $M_2 = \langle\{\circ, \bullet\}, F_2\rangle$ cumple que $M_2 \models \varphi$ y $M_2 \models \psi$.
c. Existe $F_3$ tal que $M_3 = \langle\{\circ, \bullet, \triangle\}, F_3\rangle$ cumple que $M_3 \models \varphi$ y $M_3 \models \psi$.
d. Existe $F_4$ tal que $M_4 = \langle\{\circ, \bullet, \triangle\}, F_4\rangle$ cumple que $M_4 \models \varphi$.

# Ejercicio 3 (25 puntos)

Construya derivaciones que justifiquen los siguientes juicios:

a. $\vdash (\alpha \leftrightarrow \neg\beta) \to (\neg(\alpha \wedge \beta) \wedge (\alpha \vee \beta))$
b. $(\forall x)f(x) =' g(x) \vdash \neg(\exists x)(\neg f(g(x)) =' f(x) \wedge f(x) =' x)$

Nota: En ningún caso se aceptan justificaciones semánticas.

# Ejercicio 4 (25 puntos)

Sea un lenguaje de primer orden con tipo de similaridad $\langle 2, 1; -; 0\rangle$, con símbolos de predicado $P$ y $Q$. Considere las siguientes fórmulas:

$$\begin{array}{rcl} \varphi & := & (\forall x)P(x,x) \\ \psi & := & (\forall y)(\exists x)P(x,y) \end{array}$$

Demuestre las siguientes afirmaciones:

a. $Mod(\varphi) \cap Mod(\psi) \neq \emptyset$.
b. $(\bar{\exists}\mathcal{M})\mathcal{M} \notin Mod(\varphi) \cup Mod(\psi)$.
c. El conjunto $\textsc{Cons}(\varphi)$ no es consistente maximal.