Examen de Lógica

2 de agosto de 2024

Indicaciones generales

- Apagar los celulares.
- La duración del examen es de **tres (3)** horas.
- En esta prueba **no** se permite consultar material alguno.
- **Toda respuesta debe estar fundamentada.** Pueden usarse los resultados que aparecen en el texto del curso, en esos casos debe describirse con precisión el enunciado que se utiliza.
- Numerar todas las hojas e incluir en cada una su nombre y cédula de identidad, utilizar las hojas de un solo lado, escribir con lápiz, iniciar cada ejercicio en hoja nueva y poner en la primera hoja la cantidad de hojas entregadas.

Ejercicio 1(25 puntos)

a. Defina inductivamente el conjunto $\mathcal{LN}$ de las listas, no vacías, de naturales usando el símbolo | como separador. Ej:

- 12 es una lista que tiene 1 elemento: el 12.
- 1|5|18 es una lista que tiene 3 elementos: 1, 5, 18.

b. Defina una función $\texttt{sust} : \mathcal{LN} \times \mathbb{N} \to \mathcal{LN}$ tal que dada una lista l y un natural k, devuelve el resultado de sustituir en l todos los elementos menores que k por el natural k. Ejemplo:

- $\texttt{sust}(12, 1) = 12$.
- $\texttt{sust}(1|5|18, 10) = 10|10|18$.

c. Demuestre por inducción que para cualquier natural k mayor que cero y lista $l \in \mathcal{LN}$, se cumple que

$$\texttt{suma}(\texttt{sust}(l, k)) \geq k * \texttt{largo}(l)$$

siendo `suma` y `largo` las funciones que suman los elementos y cuentan el largo de una lista.

Propuesta de solución

a. i Si $n \in \mathbb{N}$ entonces $n \in \mathcal{LN}$

ii Si $n \in \mathbb{N}$ y $l \in \mathcal{LN}$ entonces $n|l \in \mathcal{LN}$

b.

$$\begin{aligned}
&\texttt{sust} : \mathcal{LN} \times \mathbb{N} \to \mathcal{LN} \\
&\texttt{sust}(n, k) \quad = \text{si } n < k \text{ entonces } k \text{ sino } n \\
&\texttt{sust}(n|l, k) = \text{si } n < k \text{ entonces } k|\texttt{sust}(l, k) \text{ sino } n|\texttt{sust}(l, k)
\end{aligned}$$

OTRA DEFINICION

$$\begin{aligned}
&\texttt{sust} : \mathcal{LN} \times \mathbb{N} \to \mathcal{LN} \\
&\texttt{sust}(n, k) = m
\end{aligned}$$

$$\text{donde } m = k \text{ si } n < k \text{ sino } m = n$$

$$\texttt{sust}(n|l, k) = m|\texttt{sust}(l, k)$$
$$\text{donde } m = k \text{ si } n < k \text{ sino } m = n$$

Nota: Observar que dada $l \in \mathcal{LN}$ y $k \in \mathbb{N}$ todos los elementos de $\texttt{sust}(l, k)$ son mayores o iguales a k.

c. $(\bar{\forall} k > 0)(\bar{\forall} l \in \mathcal{LN})\texttt{suma}(\texttt{sust}(l, k)) \geq k * \texttt{largo}(l)$

siendo `suma` y `largo` las siguientes funciones:

$$\begin{aligned}
&\texttt{suma} : \mathcal{LN} \to \mathbb{N}\\
&\texttt{suma}(n) \quad = n\\
&\texttt{suma}(n|l) = n + \texttt{suma}(l)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\texttt{largo} : \mathcal{LN} \to \mathbb{N}\\
&\texttt{largo}(n) \quad = 1\\
&\texttt{largo}(n|l) = 1 + \texttt{largo}(l)
\end{aligned}$$

Sea $k \in \mathbb{N}, k > 0$ se probará:

$$(\bar{\forall} l \in \mathcal{LN})\texttt{suma}(\texttt{sust}(l, k)) \geq k * \texttt{largo}(l)$$

usando el PIP para $\mathcal{LN}$. **Identificación de la propiedad**:

$$P(l) := \texttt{suma}(\texttt{sust}(l, k)) \geq k * \texttt{largo}(l)$$

Paso Base

T) $P(n) : \texttt{suma}(\texttt{sust}(n, k)) \geq k * \texttt{largo}(n)$

Demo)

1) $n < k$

$$\begin{aligned}
&\texttt{suma}(\texttt{sust}(n, k))\\
&= \text{(def. de } \texttt{sust}\text{)}\\
&\texttt{suma}(k)\\
&= \text{(def. de } \texttt{suma}\text{)}\\
&k\\
&\geq \text{(aritmética)}\\
&k * 1\\
&= \text{(def. de } \texttt{largo}\text{)}\\
&k * \texttt{largo}(n)
\end{aligned}$$

2) $n \geq k$

$$\begin{aligned}
&\texttt{suma}(\texttt{sust}(n, k)) \\
&= \text{(def. de } \texttt{sust}) \\
&\texttt{suma}(n) \\
&= \text{(def. de } \texttt{suma}) \\
&n \\
&\geq \textbf{(2)}) \\
&k \\
&= \text{(aritmética)} \\
&k * 1 \\
&= \text{(def. de } \texttt{largo}) \\
&k * \texttt{largo}(n)
\end{aligned}$$

Paso Inductivo

H) $P(l) : \texttt{suma}(\texttt{sust}(l, k)) \geq k * \texttt{largo}(l)$

T) $P(n|l) : \texttt{suma}(\texttt{sust}(n|l, k)) \geq k * \texttt{largo}(n|l)$

Demo)

1) $n < k$

$$\begin{aligned}
&\texttt{suma}(\texttt{sust}(n|l, k)) \\
&= \text{(def. de } \texttt{sust}) \\
&\texttt{suma}(k|\texttt{sust}(l, k)) \\
&= \text{(def. de } \texttt{suma}) \\
&k + \texttt{suma}(\texttt{sust}(l, k)) \\
&\geq \textbf{(HIP)}) \\
&k + k * \texttt{largo}(l) \\
&= \text{(aritmética)} \\
&k * (1 + \texttt{largo}(l)) \\
&= \text{(def. de } \texttt{largo}) \\
&k * \texttt{largo}(n|l)
\end{aligned}$$

2) $n \geq k$

$$\begin{aligned}
&\texttt{suma}(\texttt{sust}(n|l, k)) \\
&= \text{(def. de } \texttt{sust}) \\
&\texttt{suma}(n|\texttt{sust}(l, k)) \\
&= \text{(def. de } \texttt{suma}) \\
&n + \texttt{suma}(\texttt{sust}(l, k)) \\
&\geq \textbf{(2)}) \\
&k + \texttt{suma}(\texttt{sust}(l, k)) \\
&\geq \textbf{(HIP)}) \\
&k + k * \texttt{largo}(l) \\
&= \text{(aritmética)} \\
&k * (1 + \texttt{largo}(l)) \\
&= \text{(def. de } \texttt{largo}) \\
&k * \texttt{largo}(n|l)
\end{aligned}$$

OTRA PRUEBA

Paso Base

T) $P(n) : \texttt{suma}(\texttt{sust}(n, k)) \geq k * \texttt{largo}(n)$

Demo)

$$\begin{aligned}
&\texttt{suma}(\texttt{sust}(n,k))\\
&= \text{(def. de sust)}\\
&\texttt{suma}(m)\\
&= \text{(def. de suma)}\\
&m\\
&\geq \text{(Obs. def. sust)}\\
&k\\
&\geq \text{(aritmética)}\\
&k*1\\
&= \text{(def. de largo)}\\
&k*\texttt{largo}(n)
\end{aligned}$$

Paso Inductivo

H) $P(l) : \texttt{suma}(\texttt{sust}(l,k)) \geq k * \texttt{largo}(l)$

T) $P(n|l) : \texttt{suma}(\texttt{sust}(n|l,k)) \geq k * \texttt{largo}(n|l)$

Demo)

$$\begin{aligned}
&\texttt{suma}(\texttt{sust}(n|l,k))\\
&= \text{(def. de sust)}\\
&\texttt{suma}(m|\texttt{sust}(l,k))\\
&= \text{(def. de suma)}\\
&m+\texttt{suma}(\texttt{sust}(l,k))\\
&\geq \text{(\textbf{Obs. sust})}\\
&k+\texttt{suma}(\texttt{sust}(l,k))\\
&\geq \text{(\textbf{HIP}))}\\
&k+k*\texttt{largo}(l)\\
&= \text{(aritmética)}\\
&k*(1+\texttt{largo}(l))\\
&= \text{(def. de largo)}\\
&k*\texttt{largo}(n|l)
\end{aligned}$$

Como nos encontramos bajo las hipotesis del PIP para $\mathcal{LN}$, podemos afirmar que

$$(\bar{\forall} l \in \mathcal{LN})\texttt{suma}(\texttt{sust}(l,k)) \geq k * \texttt{largo}(l)$$

y como k es cualquier natural mayor que cero se cumple la propiedad pedida.

Ejercicio 2 (25 puntos)

Sea un lenguaje de primer orden con igualdad, con tipo de similaridad $\langle 1; 1; 0\rangle$, con símbolo de predicado P y símbolo de función f, y las siguientes fórmulas:

- $\varphi := P(x)$
- $\psi := (\forall x) f(x) =' x$

Para cada una de las siguientes afirmaciones indique si son verdaderas o falsas. Justifique su respuesta.

a. $(\bar{\exists}\mathcal{M}_1 : eta)(M_1 \not\models \varphi \text{ y } M_1 \not\models \varphi \to \psi)$
b. $(\bar{\forall}\mathcal{M} : eta)(\text{Si } \mathcal{M} \not\models \varphi \text{ entonces } \mathcal{M} \models \varphi \to \psi)$
c. $(\bar{\exists}\mathcal{M}_2 : eta)(M_2 \not\models \varphi \to \psi \text{ y } M_2 \models \neg\psi)$

Propuesta de solución

a. **VERDADERA** - Sea M = $\langle U, R, F\rangle$

$$\begin{array}{l} M \not\models \varphi \\ \Leftrightarrow \text{(def. } \varphi) \\ M \not\models P(x) \\ \Leftrightarrow \text{(cl)} \\ M \not\models (\forall x)P(x) \\ \Leftrightarrow \text{(contrareciproco 2.4.5.)} \\ (\bar{\exists}a \in |\mathcal{M}|)\mathcal{M} \not\models P(\bar{a}) \\ \Leftrightarrow (\text{def. } \not\models \text{ y } v^M) \\ (\bar{\exists}a \in |\mathcal{M}|)a \notin R \\ (I) \end{array}$$

$$\begin{array}{l} M \not\models \varphi \to \psi \\ \Leftrightarrow \text{(def. } \varphi \text{ y } \psi) \\ M \not\models P(x) \to (\forall x)f(x) =' x \\ \Leftrightarrow \text{(cl)} \\ M \not\models (\forall x)(P(x) \to (\forall x)f(x) =' x) \\ \Leftrightarrow \text{(contrareciproco 2.4.5.)} \\ (\bar{\exists}a \in |\mathcal{M}|)\mathcal{M} \not\models (P(\bar{a}) \to (\forall x)f(x) =' x) \\ \Leftrightarrow \text{(contrareciproco 2.4.5.)} \\ (\bar{\exists}a \in |\mathcal{M}|)(\mathcal{M} \models (P(\bar{a}) \text{ y } \mathcal{M} \not\models (\forall x)f(x) =' x) \\ \Leftrightarrow \text{(contrareciproco 2.4.5.)} \\ (\bar{\exists}a \in |\mathcal{M}|)(\mathcal{M} \models (P(\bar{a}) \text{ y } (\bar{\exists}b \in |\mathcal{M}|)\mathcal{M} \not\models f(\bar{b}) =' \bar{b}) \\ \Leftrightarrow (\text{def. } \not\models \text{ y } v^M) \\ (\bar{\exists}a \in |\mathcal{M}|)(a \in R \text{ y } (\bar{\exists}b \in |\mathcal{M}|)F(b) \neq b) \\ (II) \end{array}$$

Sea $\mathcal{M}_1 = \langle \{\bullet, \circ\}, \{\circ\}, \circ\rangle$

- $\mathcal{M}_1$ cumple I alcanza con tomar $a = \bullet$
- $\mathcal{M}_1$ cumple II alcanza con tomar $a = \circ$ y $b = \bullet$

b. **FALSA**

Al negar la parte propuesta se obtiene la parte a) que es VERDADERA por lo tanto esta afirmacion es FALSA.

c. **VERDADERA** - Sea $\mathcal{M} = \langle U, R, F \rangle$

$$
\begin{aligned}
& M \models \neg\psi \\
& \Leftrightarrow \text{(def. } \psi\text{)} \\
& M \models \neg(\forall x) f(x) =' x \\
& \Leftrightarrow \text{(contrareciproco 2.4.5.)} \\
& (\bar{\exists} a \in |\mathcal{M}|)\mathcal{M} \not\models f(\bar{a}) =' \bar{a} \\
& \Leftrightarrow \text{(def. } \not\models \text{ y } v^M\text{)} \\
& (\bar{\exists} a \in |\mathcal{M}|) F(a) \neq a \\
& (III)
\end{aligned}
$$

Sea $\mathcal{M}_2 = \mathcal{M}_1$ dada en a. En esa parte ya se probó que $M_1 \not\models \varphi \to \psi$ por lo tanto $M_2 \not\models \varphi \to \psi$

- $\mathcal{M}_2$ cumple III alcanza con tomar $a = \bullet$

Por lo tanto $M_2 \models \neg\psi$

Ejercicio 3 (25 puntos)

Construya derivaciones que justifiquen los siguientes juicios:

a. $\vdash (\forall x)(P(c) \to P(x)) \leftrightarrow (\neg P(c) \lor (\forall x)P(x))$

b. $(\exists x)(\forall y) f(x) =' y \vdash (\forall z)(\forall y) z =' y$

Nota: En ningún caso se aceptan justificaciones semánticas.

Propuesta de solución

a.

$$
\dfrac{
\dfrac{
\dfrac{
[\neg(\neg P(c) \lor (\forall x)P(x))]^2
\quad
\dfrac{
\dfrac{
\dfrac{
\dfrac{[(\forall x)(P(c) \to P(x))]^1}{P(c) \to P(x)}\, E\forall(*_2)
\quad
\dfrac{
\dfrac{
[\neg(\neg P(c) \lor (\forall x)P(x))]^2
\quad
\dfrac{[\neg P(c)]^3}{\neg P(c) \lor (\forall x)P(x)}\, I\lor
}{\bot}\, E\neg
}{P(c)}\, RAA^3
}{P(x)}\, E\to
}{(\forall x)P(x)}\, I\forall(*_1)
}{\neg P(c) \lor (\forall x)P(x)}\, I\lor
}{\bot}\, E\neg
}{\neg P(c) \lor (\forall x)P(x)}\, RAA^2
\qquad
\dfrac{
\dfrac{
\dfrac{
[\neg P(c) \lor (\forall x)P(x)]^1
\quad
\dfrac{
\dfrac{[\neg P(c)]^5 \quad [P(c)]^4}{\bot}\, E\neg
}{P(x)}\, E\bot
\quad
\dfrac{[(\forall x)P(x)]^5}{P(x)}\, E\forall(*_4)
}{P(x)}\, E\lor^5
}{P(c) \to P(x)}\, I\to^4
}{(\forall x)(P(c) \to P(x))}\, I\forall(*_3)
}{(\forall x)(P(c) \to P(x)) \leftrightarrow (\neg P(c) \lor (\forall x)P(x))}\, I\leftrightarrow^1
$$

$(*_1)$ $x \notin FV((\forall x)(P(c) \to P(x)), \neg(\neg P(c) \lor (\forall x)P(x)))$
$(*_2)$ x libre para x en $P(c) \to P(x)$
$(*_3)$ $x \notin FV(\neg P(c) \lor (\forall x)P(x))$
$(*_4)$ x libre para x en $P(x)$

b.

$$
\begin{prooftree}
\AxiomC{$(\exists x)(\forall y)f(x) =' y$}
\AxiomC{$[(\forall y)f(x) =' y]^1$}
\RightLabel{$E\forall(*_4)$}
\UnaryInfC{$f(x) =' z$}
\RightLabel{$RI2$}
\UnaryInfC{$z =' f(x)$}
\AxiomC{$[(\forall y)f(x) =' y]^1$}
\RightLabel{$E\forall(*_5)$}
\UnaryInfC{$f(x) =' y$}
\RightLabel{$RI3$}
\BinaryInfC{$z =' y$}
\RightLabel{$E\exists^1(*_3)$}
\BinaryInfC{$z =' y$}
\RightLabel{$I\forall(*_2)$}
\UnaryInfC{$(\forall y)z =' y$}
\RightLabel{$I\forall(*_1)$}
\UnaryInfC{$(\forall z)(\forall y)z =' y$}
\end{prooftree}
$$

$(*_1)$ $z \notin FV((\exists x)(\forall y)f(x) =' y)$
$(*_2)$ $y \notin FV((\exists x)(\forall y)f(x) =' y)$
$(*_3)$ $x \notin FV(z =' y)$
$(*_4)$ z libre para y en $f(x) =' y$
$(*_5)$ y libre para y en $f(x) =' y$

Ejercicio 4 (25 puntos)

Indique cuales de las siguientes afirmaciones son verdaderas. Justifique.

a. Existe $\Gamma \subseteq \texttt{PROP}$, teoría y no consistente
b. Existe $\Gamma \subseteq \texttt{PROP}$, completo y no teoría.
c. Existe $\Gamma \subseteq \texttt{PROP}$, teoría y no completo
d. Existe $\Gamma \subseteq \texttt{PROP}$, completo y no consistente maximal.

Recuerde que un conjunto Γ es completo si y sólo si es consistente y para toda $\varphi \in \texttt{PROP}$ se cumple que: $\Gamma \vdash \varphi$ o $\Gamma \vdash \neg\varphi$.

Propuesta de solución

a. **Verdadero**.

Consideramos $\Gamma := \texttt{PROP}$.

- $\texttt{PROP}$ es teoría ya que $\textsc{Cons}(\texttt{PROP}) = \texttt{PROP}$
- $\texttt{PROP}$ es inconsistente porque $\bot \in \texttt{PROP}$ y por lo tanto $\texttt{PROP} \vdash \bot$

b. **Verdadero**.

Consideramos $\Gamma := \mathcal{P}$ (donde $\mathcal{P}$ es el conjunto de todas las letras proposicionales.)

- Γ es completo porque existe una única valuación v tal que $v(\mathcal{P}) = 1$. (caracterización semántica de completo).
- Γ no es teoría ya que $\neg\bot$ se deriva de Γ y $\neg\bot \notin \Gamma$.

c. **Verdadero**.

Consideramos $\Gamma = \textsc{Cons}(\emptyset)$.

- Γ es teoría por construcción (definido por $\textsc{Cons}$).

- Γ no es completo ya que no hay una única valuación que le asigne 1. En particular, toda valuación v cumple $v(\Gamma) = 1$, ya que $\textsc{Cons}(\emptyset) = \{\alpha \in \texttt{SENT} \mid \models \alpha\}$.

d. **Verdadero**.

Consideramos el Γ definido en la parte b): $\Gamma := \mathcal{P}$.

- Γ es completo (ver parte b))
- Γ no es consistente maximal.
  Por resultado visto en el curso: todo conjunto consistente maximal es teoría. En la parte b) vimos que Γ no es teoría.