Examen de Lógica

1 de febrero de 2024

Indicaciones generales

- Apagar los celulares.
- La duración del examen es de **tres (3)** horas.
- En esta prueba **no** se permite consultar material alguno.
- **Toda respuesta debe estar fundamentada.** Pueden usarse los resultados que aparecen en el texto del curso, en esos casos debe describirse con precisión el enunciado que se utiliza.
- Numerar todas las hojas e incluir en cada una su nombre y cédula de identidad, utilizar las hojas de un solo lado, escribir con lápiz, iniciar cada ejercicio en hoja nueva y poner en la primera hoja la cantidad de hojas entregadas.

Ejercicio 1(25 puntos)

Sean los siguientes conjuntos:

- $LETRAS$, el conjunto de las consonantes y vocales del español en minúsculas.
- CON, $CON \subseteq LETRAS$ conjunto de las consonantes del español en minúsculas.
- $VOCAL$, $VOCAL \subseteq LETRAS$ conjunto de las vocales del español en minúsculas.

a. Defina inductivamente el lenguaje CVC de todas las tiras de $LETRAS$ que cumplen las siguientes condiciones:

   - Tienen por lo menos una vocal.
   - Empiezan y terminan en consonante.
   - Las consonantes y vocales están intercaladas, o sea: siempre tienen una sola vocal entre dos consonantes y una consonante entre dos vocales.

   Ejemplo de tiras pertenecientes a CVC: *car*,*cametanor*, *telefonos*, *xesaj*,*caracol*

   Ejemplo de tiras que no pertenecen CVC:

   > *q*, porque no tiene vocales.
   > *acronimo*, porque empieza en vocal y tiene 2 consonantes seguidas.
   > *conciencia*, porque tiene n y c sin vocal en medio y las parejas de vocales (i,e) y (i,a) sin consonante en el medio.
   > *curado*, porque termina en vocal.
   > *lineal*, porque hay dos vocales sin una consonante en medio.

b. Pruebe que *logicas* $\in CVC$

c. Defina las siguientes funciones:

   - $CC : CVC \to \mathbb{N}$ tal que cuenta la cantidad de consonantes que hay en su parámetro.
   - $CV : CVC \to \mathbb{N}$ tal que cuenta la cantidad de vocales que hay en su parámetro.

   Ejemplos:

   $CC(\text{car}) = 2$, $CC(\text{cametanor}) = 5$, $CC(\text{xesaj}) = 3$, $CC(\text{caracol})=4$

   $CV(\text{car}) = 1$, $CV(\text{cametanor}) = 4$, $CV(\text{xesaj}) = 2$, $CV(\text{caracol})=3$

d. Pruebe inductivamente la siguiente propiedad: $(\bar{\forall} w \in CVC)(CC(w) \geq CV(w))$

Propuesta de solución

a. Una definición del lenguaje es la siguiente:

I. $c_1vc_2 \in CVC$ Si $c_1, c_2 \in CON$ y $v \in VOCAL$

II. $\alpha vc_1 \in CVC$ Si $\alpha \in CVC, c_1 \in CON$ y $v \in VOCAL$

b.

1. $log \in CVC \Leftrightarrow$ (por regla I porque)
   $l, g \in CON,$ y $a \in VOCAL$(lo que es cierto porque cumplen con las condiciones de cada conjunto.)
2. $logic \in CVC \Leftrightarrow$ (por regla II, porque se cumple 1. y además)
   $i \in VOCAL$(lo que es cierto porque i es una vocal minúscula.) y
   $c \in CON$(lo que es cierto porque c es una consonante minúscula.)
3. $logicas \in CVC \Leftrightarrow$ (por regla II, porque se cumple 2 y)
   $a \in VOCAL$(lo que es cierto porque a es una vocal minúscula.)y
   $s \in CON$(lo que es cierto porque s es una consonante minúscula.)

c. $CC : CVC \to \mathbb{N}$
$CC(c_1vc_2) = 2$
$CC(\alpha vc_1) \ = 1 + CC(\alpha)$

$CV : CVC \to \mathbb{N}$
$CV(c_1vc_2) = 1$
$CV(\alpha vc_1) \ = 1 + CC(\alpha)$

d. **T)** $(\bar{\forall}\alpha \in CVC)(CC(\alpha) \geq CV(\alpha))$

Dem.

Por induccion en CVC.
Sea $P(\alpha) := CC(\alpha) \geq CV(\alpha)$

PB.
H) $c_1, c_2 \in CON, v \in VOCAL$
T) $P(c_1vc_2) = CC(c_1vc_2) \geq CV(c_1vc_2)$
Dem.

Por definición, $CC(c_1vc_2) = 2$ y $CV(c_1vc_2) = 1$ por lo que se cumple la tesis.

■

PI.
H) $P(\alpha) = CC(\alpha) \geq CV(\alpha)$
T) $P(\alpha vc_1) = CC(\alpha vc_1) \geq CV(\alpha vc_1)$
Dem.

Por definición de CC:

$$CC(\alpha vc_1) = 1 + CC(\alpha)$$

Por hipótesis inductiva:

$$CC(\alpha) \geq CV(\alpha)$$

Combinando las dos fórmulas anteriores tenemos que :

$$CC(\alpha vc_1) \geq 1 + CV(\alpha)$$

Pero el segundo miembro de la desigualdad es $CV(\alpha vc_1)$ por definición de CV, por lo que se cumple la tesis.

■

■

Por los dos teoremas probados anteriormente, se está en las hipótesis del PIP de CVC, por lo que se cumple la propiedad pedida por la aplicación de dicho principio.

Ejercicio 2 (25 puntos)

Considere las siguientes fórmulas:

$$\begin{aligned} \varphi_1 &:= \; p \lor (q \leftrightarrow r) \\ \varphi_2 &:= \; (p \lor q) \leftrightarrow (p \lor r) \\ \varphi_3 &:= \; \neg p \land (\neg q \lor r) \end{aligned}$$

Determine si las siguientes afirmaciones son verdaderas o falsas. Justifique.

a. Existe una valuación v_1 tal que $v_1(p) = 1$ y $v_1(\varphi_1) \neq v_1(\varphi_2)$.
b. Existe una valuación v_2 tal que $v_2(\varphi_1) \neq v_2(\varphi_3)$.
c. $\varphi_2 \models \varphi_3$

Propuesta de solución

a. **Falso.** Sea una valuación arbitraria v tal que $v(p) = 1$.

   Se cumple entonces, $v(\varphi_1) = 1$ por definición de valuación, dado que la fórmula es un $\lor$ y una de sus partes, es p.

   Usando el mismo razonamiento sobre φ_2, también se cumple que $v(\varphi_2) = 1$. Esto es porque las dos partes del $\leftrightarrow$ son un $\lor$ con una de las partes p. Esto hace que las dos partes del $\leftrightarrow$ tomen el mismo valor por la definición de valuación.

   Por este motivo, no es cierto que exista una valuación con las condiciones pedidas. Por lo tanto, la afirmación es falsa.
b. **Verdadera.** Considere unan valuación v_1, donde $v_1(p) = 1$.

   En este caso, por definición de valuación, se cumple que $v_1(\varphi_1) = 1$ dado que, como se observó en la parte anterior, la fórmula es un $\lor$ y una de sus partes es p.

   Sin embargo, φ_3 es un $\land$ en donde una de las partes es la negación de p, lo que hace que $v_1(\varphi_3) = 0$. Por lo tanto, se encontró una valuación v_1 en donde $v_1(\varphi_1) \neq v_1(\varphi_3)$.
c. **Falsa.** Para refutar la afirmación, basta retomar la valuación v_1 de la parte anterior. Por la parte a, se cumple que $v_1(\varphi_2) = 1$.

   Por otro lado, en la parte b se probó que $v_1(\varphi_3) = 0$.

   Por lo tanto, se encontró una valuación v_1 que viola la consecuencia lógica.

Ejercicio 3 (25 puntos)

Construya derivaciones que prueben los siguientes juicios.

a. $(\exists x)(\neg P(x) \to Q(x,y)) \vdash (\forall x)(Q(x,y) \to P(x)) \to (\exists x)P(x)$
b. $\neg r \to (\neg q \lor p), r \to p \vdash q \to p$

Nota: no se aceptan consideraciones semánticas.

Propuesta de solución

a.

$$
\dfrac{
\dfrac{(\exists x)(\neg P(x) \to Q(x,y)) \qquad
\dfrac{
\dfrac{
\dfrac{[\neg P(x)]^1 \qquad
\dfrac{
\dfrac{[(\forall x)(Q(x,y) \to P(x))]^3}{Q(x,y) \to P(x)}\, E\forall(*1)
\qquad
\dfrac{[\neg P(x) \to Q(x,y)]^2 \qquad [\neg P(x)]^1}{Q(x,y)}\, E\to
}{P(x)}\, E\to
}{\bot}\, E\neg
}{P(x)}\, RAA(1)
}{(\exists x)P(x)}\, I\exists(*2)
}{(\exists x)P(x)}\, E\exists(2)(*3)
}{(\forall x)(Q(x,y) \to P(x)) \to (\exists x)P(x)}\, I\to(3)
$$

(*1) x libre para x en $Q(x,y) \to P(x)$

(*2) x libre para x en $P(x)$

(*3) $x \notin FV(\{(\exists x)P(x), (\forall x)(Q(x,y) \to P(x))\})$

b.

$$
\dfrac{
\dfrac{
\dfrac{[\neg p]^3 \qquad
\dfrac{
\dfrac{\neg r \to \neg q \vee p \qquad
\dfrac{
\dfrac{[\neg p]^3 \qquad \dfrac{r \to p \qquad [r]^1}{p}\, E\to}{\bot}\, E\neg
}{\neg r}\, I\neg(1)
}{\neg q \vee p}\, E\to
\qquad
\dfrac{\dfrac{[\neg q]^2 \qquad [q]^4}{\bot}\, E\neg}{p}\, E\bot
\qquad [p]^2
}{p}\, E\vee(2)
}{\bot}\, E\neg
}{p}\, RAA(3)
}{q \to p}\, I\to(4)
$$

Ejercicio 4 (25 puntos)

Se considera el siguiente conjunto $\Gamma \subseteq \texttt{PROP}$:

$$\Gamma = \{(p_i \to \neg p_i) \;/\; i \in \mathbb{N}\}$$

a. Demuestre que:

I. Γ es consistente.
II. Γ es completo.
III. Γ no es consistente maximal.

b. Determine si las siguientes afirmaciones son verdaderas o falsas. Justifique.

I. Existe un conjunto Γ_1 completo tal que $\Gamma_1 \cap \Gamma = \emptyset$.
II. Existe un conjunto Γ_2 consistente maximal tal que $\Gamma_2 \cap \Gamma = \emptyset$.
III. Existe un conjunto Γ_3 consistente maximal tal que $\Gamma_3 \cap \textsc{Cons}(\Gamma) = \emptyset$.

Nota: Recuerde que un conjunto Γ es completo si y solo si $(\bar{\forall}\varphi \in \texttt{PROP})(\Gamma \vdash \varphi \text{ o } \Gamma \vdash \neg\varphi)$

Propuesta de solución

a. I. Consideramos la valuación v que asigna 0 a todas las variables proposicionales.

Sea i un natural cualquiera. Se cumplirá:

$$
\begin{array}{ll}
v(p_i \to \neg p_i) & \\
= & \text{(definición de valuación)} \\
\max\{1 - v(p_i), v(\neg p_i)\} & \\
= & \text{(definición de valuación)} \\
\max\{1 - v(p_i)\} & \\
= & \text{(definición de } v\text{)} \\
\max\{1\} & \\
= & \text{(definición de máximo)} \\
1 & \square
\end{array}
$$

Con lo anterior queda probado que la valuación v le asigna 1 a toda proposición del conjunto Γ; por lo tanto por *caracterización semántica de consistencia* queda demostrado que Γ es consistente.

II. Sea v' una valuación cualquiera tal que $v'(\Gamma) = 1$.

Consideramos $i \in \mathbb{N}$.

$$
\begin{array}{ll}
v'(p_i \to \neg p_i) = 1 & \\
\Leftrightarrow & \text{(definición de valuación)} \\
\max\{1 - v(p_i), v(\neg p_i)\} = 1 & \\
\Leftrightarrow & \text{(definición de valuación)} \\
\max\{1 - v'(p_i)\} = 1 & \\
\Leftrightarrow & \text{(definición de máximo)} \\
1 - v'(p_i) = 1 & \\
\Leftrightarrow & \text{(aritmética)} \\
v'(p_i) = 0 &
\end{array}
$$

Se concluye que $(\bar{\forall} i \in \mathbb{N}) v'(p_i) = 0$ y por lo tanto la valuación v' es igual a la valuación v de la parte (a.I) ya que una valuación queda determinada por los valores que asigna a las letras proposicionales.

Queda demostrado que existe una única valuación que asigna 1 a todas las proposiciones de Γ. Aplicando la *caracterización semántica de la completitud* se concluye que Γ es completo.

III. Consideramos el conjunto $\Gamma' = \Gamma \cup \{\neg\bot\}$

La valuación v (definida en la parte a.I) asigna 1 a todos los Γ y también asigna 1 a $\neg\bot$ (tautología). Por lo tanto Γ' es consistente (caracterización semántica de consistencia). (*)

Observamos que:

- $\Gamma \subseteq \Gamma'$ por construcción)
- Γ' es consistente por (*)
- $\Gamma' \neq \Gamma$ porque $\neg\bot \in \Gamma'$ y $\neg\bot \notin \Gamma$

Esto contradice la definición de consistente maximal para Γ. Deducimos que Γ **no** es consistente maximal.

b. I. La afirmación es **verdadera**.

Probaremos la existencia dando un conjunto que cumpla las condiciones requeridas.

Definimos $\Gamma_1 = \{\neg p_i / i \in \mathbb{N}\}$.

Observamos que Γ_1 cumple con lo pedido:

- $\Gamma_1 \cap \Gamma = \emptyset$ por construcción.
  Γ_1 es completo ya que existe una única valuación que asigna 1 a todos los elementos de Γ_1. Esta es la valuación que asigna 0 a todas las variables proposicionales.

II. La afirmación es **verdadera**.

Probaremos la existencia dando un conjunto que cumpla con lo pedido.

Definimos $\Gamma_2 = \{\varphi \ / \ v_1(\varphi) = 1\}$. Donde v_1 es la valuación que asigna 1 a todas las letras proposicionales.

Vemos que Γ_2 cumple con lo pedido:

Por *caracterización semántica de consistencia maximal*, sabemos que Γ_2 es consistente maximal (Ejercicio 7 del práctico 5).

Además vemos que v_1 le asigna 0 a todo elemento del conjunto Γ

$$
\begin{array}{ll}
v_1(p_i \to \neg p_i) & \\
= & \text{(definición de valuación)} \\
\max\{1 - v_1(p_i), v_1(\neg p_i)\} & \\
= & \text{(definición de valuación)} \\
\max\{1 - v_1(p_i)\} & \\
= & \text{(definición de } v_1\text{)} \\
\max\{0\} & \\
= & \text{(definición de máximo)} \\
0 & \square
\end{array}
$$

Dado que la valuación v_1 asigna 1 a todos los elementos de Γ_2 y asigna 0 a los elementos de Γ, no existen elementos comunes a Γ_2 y Γ

III. La afirmación es **falsa**.

Supongamos Γ_3 consistente maximal. Observamos que:

- Γ_3 es teoría por ser consistente maximal (resultado visto en el curso: práctico 5, ejercicio 9).
- $\textsc{Cons}(\Gamma)$ es teoría por construcción.

Por otro lado, sabemos que toda teoría contiene a las tautologías ya que estas se derivan de cualquier conjunto. Luego, la intersección de Γ_3 con $\textsc{Cons}(\Gamma)$ no puede ser vacía.

Por lo tanto, no existe un conjunto con las condiciones pedidas.