# Examen de Lógica

**5 de diciembre de 2024**

**Indicaciones generales**

- Apagar los celulares.
- La duración del examen es de **tres (3)** horas.
- En esta prueba **no** se permite consultar material alguno.
- **Toda respuesta debe estar fundamentada.** Pueden usarse los resultados que aparecen en el texto del curso, en esos casos debe describirse con precisión el enunciado que se utiliza.
- Numerar todas las hojas e incluir en cada una su nombre y cédula de identidad, utilizar las hojas de un solo lado, escribir con lápiz, iniciar cada ejercicio en hoja nueva y poner en la primera hoja la cantidad de hojas entregadas.

## Ejercicio 1(25 puntos)

Considere el siguiente alfabeto $\Sigma = \{a, b, c\}$ y el conjunto $A$ definido a continuación:

i $\epsilon \in A$

ii Si $x \in \Sigma$, $y \in \Sigma$ y $w \in A$, entonces $xwy \in A$

a. ¿Qué conjunto queda definido por las reglas anteriores? Escriba una frase que lo describa.

b. I. Defina la función $largo : A \to \mathbb{N}$ que dado un elemento de $A$ devuelva la cantidad de símbolos que tiene.

   II. Defina la función $invertir : A \to A$ que dado un elemento de $A$ devuelva el elemento con los símbolos invertidos.

   III. Defina la función $cantEspejo : A \to \mathbb{N}$ que dado un elemento $w$ de $A$ devuelva el largo del mayor prefijo de la primera mitad de $w$ tal que al invertirlo es un sufijo de $w$.

   Ejemplos:

   - $cantEspejo(\boldsymbol{ab}cb\boldsymbol{ba}) = 2$.
   - $cantEspejo(\boldsymbol{b}cb\boldsymbol{b}) = 1$.
   - $cantEspejo(\boldsymbol{abccba}) = 3$.
   - $cantEspejo(abccbb) = 0$.

c. Demostrar que $(\bar{\forall} w \in A)(w = invertir(w) \Rightarrow largo(w) = 2 * cantEspejo(w))$.

## Propuesta de solución

a. El conjunto definido por las reglas son las tiras de $\Sigma^*$ de largo o cantidad de símbolos par.

b. I. $largo : A \to \mathbb{N}$
   $largo(\epsilon) \quad = 0$
   $largo(xwy) = 2 + largo(w)$

II. $invertir : A \to A$
$invertir(\epsilon) \quad = \epsilon$
$invertir(\boldsymbol{x}w\boldsymbol{y}) = \boldsymbol{y}invertir(w)\boldsymbol{x}$

III. $cantEspejo : A \to \mathbb{N}$
$cantEspejo(\epsilon) \quad = 0$
$$cantEspejo(xwy) = \begin{cases} 1 + cantEspejo(w) & \text{si } x = y \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

c. Se probará $(\bar{\forall} w \in A)(w = invertir(w) \Rightarrow largo(w) = 2 * cantEspejo(w))$ por inducción en $A$.

**Identificación de la propiedad.**
Sea $P(w) := w = invertir(w) \Rightarrow largo(w) = 2 * cantEspejo(w)$
**PB.**
**T)** $P(\epsilon) : \epsilon = invertir(\epsilon) \Rightarrow largo(\epsilon) = 2 * cantEspejo(\epsilon)$
**Dem.**

Para demostrar un implica, demostramos el consecuente suponiendo que se cumple el antecedente.

En este caso, por definición $largo(\epsilon) = 0$ y $cantEspejo(\epsilon) = 0$. Por lo tanto, $largo(\epsilon) = 0 = 2 * 0 = 2 * cantEspejo(\epsilon)$.

■

**PI.**
**H)** $P(w) : w = invertir(w) \Rightarrow largo(w) = 2 * cantEspejo(w)$
**T)** $P(xwy) : xwy = invertir(xwy) \Rightarrow largo(xwy) = 2 * cantEspejo(xwy)$
**Dem.**

Debemos demostrar que $largo(xwy) = 2*cantEspejo(xwy)$, suponiendo **H** y $xwy = invertir(xwy)$ (antecedente de **T**).

Como suponemos que se cumple $xwy = invertir(xwy)$, por definición $xwy = yinvertir(w)x$. La única forma de que esto se cumpla es que $w = invertir(w)$ y $x = y$ **(1)**.

Ahora, si tenemos que $w = invertir(w)$ nos encontramos en las hipótesis de **H**, por lo tanto podemos afirmar que se cumple que $largo(w) = 2 * cantEspejo(w)$ **(2)**.

$$\begin{aligned}
& largo(xwy) \\
&=_{\text{(def. de } largo)} \\
& 2 + largo(w) \\
&=_{\text{por } \mathbf{(2)}} \\
& 2 + 2 * cantEspejo(w) \\
&=_{\text{Aritmetica}} \\
& 2 * (cantEspejo(w) + 1) \\
&=_{\text{por } \mathbf{(1)} \text{ (x = y) y def de } cantEspejo} \\
& 2 * cantEspejo(xwy)
\end{aligned}$$

Con esto demostramos que $largo(xwy) = 2 * cantEspejo(xwy)$.

■

Por lo tanto, por estar en las hipótesis del PIP de $A$, se cumple la propiedad pedida por la aplicación de dicho principio.

# Ejercicio 2 (25 puntos)

Sea un lenguaje de primer orden con tipo de similaridad $\langle 1; 2; 1\rangle$ con símbolo de predicado $P$, símbolo de función $f$ y símbolo de constante $c$.
Considere las fórmulas:

$$\varphi_1 = (\forall x)P(f(x,c))$$
$$\varphi_2 = (\forall x)f(x,c) =' c$$

a. Sea $M_1 = \langle \mathbb{N}, Par, *, n\rangle$. Determine el valor de $n$ para que que $M_1 \models \varphi_1 \wedge \varphi_2$.
b. Determine si existe $m$ tal que $M_2 = \langle \mathbb{N}, Par, *, m\rangle$ modela $\varphi_1 \wedge \neg\varphi_2$.
c. Demuestre que $\not\models \varphi_1 \rightarrow P(y)$

# Propuesta de solución

Dadas:

$$\varphi_1 = (\forall x)P(f(x,c))$$
$$\varphi_2 = (\forall x)f(x,c) =' c$$

a. $M_1 = \langle \mathbb{N}, Par, *, n\rangle$

$$M_1 \models \varphi_1 \wedge \varphi_2$$
$\Leftrightarrow$ (def. de $\varphi_1$ y $\varphi_2$)
$$M_1 \models (\forall x)P(f(x,c)) \wedge (\forall x)f(x,c) =' c$$
$\Leftrightarrow$ (2.4.5)
$$M_1 \models (\forall x)P(f(x,c)) \text{ y } M_1 \models (\forall x)f(x,c) =' c$$

$$M_1 \models (\forall x)f(x,c) =' c$$
$\Leftrightarrow$ (2.4.5)
$$(\bar{\forall} k \in \mathbb{N})M_1 \models f(\bar{k}, c) =' c$$
$\Leftrightarrow$ (Def. de $\models$)
$$(\bar{\forall} k \in \mathbb{N})v^{M_1}(f(\bar{k}, c) =' c) = 1$$
$\Leftrightarrow$ (Def. de $v^{M_1}$ y de $M_1$)
$$(\bar{\forall} k \in \mathbb{N})k * n = n$$

Para que se cumpla esta propiedad $n$ debe ser igual a cero.

Verifiquemos si $M_1 = \langle \mathbb{N}, Par, *, 0\rangle$ modela $\varphi_1$

$$M_1 \models (\forall x)P(f(x,c))$$
$\Leftrightarrow$ (2.4.5)
$$(\bar{\forall} k \in \mathbb{N})M_1 \models P(f(\bar{k}, c))$$
$\Leftrightarrow$ (Def. de $\models$)
$$(\bar{\forall} k \in \mathbb{N})v^{M_1}(P(f(\bar{k}, c))) = 1$$
$\Leftrightarrow$ (Def. de $v^{M_1}$ y de $M_1$)
$$(\bar{\forall} k \in \mathbb{N})Par(k * 0)$$

Y esta propiedad se cumple, por lo tanto el valor de $n$ debe ser 0.

b. $M_2 = \langle \mathbb{N}, Par, *, m \rangle$

$$\begin{array}{l} M_2 \models \varphi_1 \land \neg\varphi_2 \\ \Leftrightarrow \text{(def. de } \varphi_1 \text{ y } \varphi_2) \\ M_2 \models (\forall x)P(f(x,c)) \land \neg(\forall x)f(x,c) =' c \\ \Leftrightarrow (2.4.5) \\ M_2 \models (\forall x)P(f(x,c)) \text{ y } M_2 \models \neg(\forall x)f(x,c) =' c \end{array}$$

- Por lo visto en la parte anterior para que $M_2 \models (\forall x)P(f(x,c))$ se debe cumplir que $(\bar{\forall} k \in \mathbb{N})Par(k * m)$ Para esto alcanza con que $m$ sea cualquier natural par.

$$\begin{array}{l} M_2 \models \neg(\forall x)f(x,c) =' c \\ \Leftrightarrow (2.4.5) \\ M_2 \not\models (\forall x)f(x,c) =' c \\ \Leftrightarrow \text{(contrareciproco 2.4.5)} \\ (\bar{\exists} k \in \mathbb{N})M_2 \not\models f(\bar{k},c) =' c \\ \Leftrightarrow \text{(Def. de } \models) \\ (\bar{\exists} k \in \mathbb{N})v^{M_2}(f(\bar{k},c) =' c) = 0 \\ \Leftrightarrow \text{(Def. de } v^{M_2} \text{ y de } M_2) \\ (\bar{\exists} k \in \mathbb{N})k * m \neq m \end{array}$$

Para que esta propiedad $m$ debe ser cualquier natural distinto de 0.

Una posible solución para $M_2$ es $M_2 = \langle \mathbb{N}, Par, *, 2 \rangle$

c. $\not\models \varphi_1 \to P(y)$

$$\not\models \varphi_1 \to P(y) \Leftrightarrow (\bar{\exists} M : eta)M \not\models \varphi_1 \to P(y)$$

$$\begin{array}{l} M \not\models \varphi_1 \to P(y) \\ \Leftrightarrow \text{(def. de } \varphi_1) \\ M \not\models (\forall x)P(f(x,c)) \to P(y) \\ \Leftrightarrow \text{(clausura)} \\ M \not\models (\forall y)((\forall x)P(f(x,c)) \to P(y)) \\ \Leftrightarrow \text{(contrareciproco 2.4.5)} \\ (\bar{\exists} a \in \mathbb{N})M \not\models (\forall x)P(f(x,c)) \to P(\bar{a}) \\ \Leftrightarrow \text{(contrareciproco 2.4.5)} \\ (\bar{\exists} a \in \mathbb{N})(M \models (\forall x)P(f(x,c)) \text{ y } M \not\models P(\bar{a})) \\ \Leftrightarrow \text{(Def. de } \models) \\ (\bar{\exists} a \in \mathbb{N})(M \models (\forall x)P(f(x,c)) \text{ y } v^M(P(\bar{a})) = 0 \end{array}$$

- Sea $M = M_1$ y $a = 1$.
  Por la parte anterior sabemos que $M_1 \models (\forall x)P(f(x,c))$ y además que $1 \notin Par$, por lo que queda demostrado que: $\not\models \varphi_1 \to P(y)$

# Ejercicio 3 (25 puntos)

Construya derivaciones que justifiquen los siguientes juicios:

a. $(p \land \neg r) \to \neg q \vdash (p \land q) \to r$
b. $(\forall x)(\forall y)(\forall z)(R(z,x) \land R(z,y) \to x =' y), \neg c_1 =' c_2 \vdash \neg(\exists w)(\forall x)R(w,x)$

**Nota:** En ningún caso se aceptan justificaciones semánticas.

# Propuesta de solución

a. $(p \wedge \neg r) \to \neg q \vdash (p \wedge q) \to r$

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{(p \wedge \neg r) \to \neg q \qquad \dfrac{\dfrac{[p \wedge q]^{(1)}}{p}\,E\wedge \qquad [\neg r]^{(2)}}{p \wedge \neg r}\,I\wedge}{\neg q}\,E\to \qquad \dfrac{[p \wedge q]^{(1)}}{q}\,E\wedge}{\dfrac{\bot}{r}\,RAA_2}\,E\neg}{(p \wedge q) \to r}\,I\to_1$$

b. $(\forall x)(\forall y)(\forall z)(R(z,x) \wedge R(z,y) \to x =' y), \neg c_1 =' c_2 \vdash \neg(\exists w)(\forall x)R(w,x)$

$$\dfrac{\dfrac{[(\exists w)(\forall x)R(w,x)]^{(1)} \qquad \dfrac{\neg c_1 =' c_2 \qquad \dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{(\forall x)(\forall y)(\forall z)(R(z,x) \wedge R(z,y) \to x =' y)}{(\forall y)(\forall z)(R(z,c_1) \wedge R(z,y) \to c_1 =' y)}\,E\forall^{*4}}{(\forall z)(R(z,c_1) \wedge R(z,c_2) \to c_1 =' c_2)}\,E\forall^{*3}}{R(w,c_1) \wedge R(w,c_2) \to c_1 =' c_2}\,E\forall^{*2} \qquad \dfrac{\dfrac{[(\forall x)R(w,x)]^{(2)}}{R(w,c_1)}\,E\forall^{*5} \qquad \dfrac{[(\forall x)R(w,x)]^{(2)}}{R(w,c_2)}\,E\forall^{*6}}{R(w,c_1) \wedge R(w,c_2)}\,I\wedge}{c_1 =' c_2}\,E\to}{\bot}\,E\neg}{\bot}\,E\exists_2^{*1}}{\neg(\exists w)(\forall x)R(w,x)}\,I\neg_1$$

*1) La eliminación del existe es correcta porque:
$w \notin FV(\{\bot, \neg c_1 =' c_2, (\forall x)(\forall y)(\forall z)(R(z,x) \wedge R(z,y) \to x =' y)\})$.

*2) La eliminación del para todo es correcta porque $w$ está libre para $z$ en $(R(z,c_1) \wedge R(z,c_2) \to c_1 =' c_2)$.

*3) La eliminación del para todo es correcta porque $c_2$ está libre para $y$ en $(\forall z)(R(z,c_1) \wedge R(z,y) \to c_1 =' y)$.

*4) La eliminación del para todo es correcta porque $c_1$ está libre para $x$ en $(\forall y)(\forall z)(R(z,x) \wedge R(z,y) \to x =' y)$.

*5) La eliminación del para todo es correcta porque $c_1$ está libre para $x$ en $R(w,x)$.

*6) La eliminación del para todo es correcta porque $c_2$ está libre para $x$ en $R(w,x)$.

# Ejercicio 4 (25 puntos)

Sea un lenguaje de primer orden con tipo de similaridad $\langle 1; 1; 1 \rangle$ con símbolo de predicado $P$, símbolo de función $f$ y símbolo de constante $c$.
Considere las fórmulas:

$$\begin{array}{rcl} \alpha & = & (\forall x)(P(x) \to f(x) =' x) \\ \beta & = & (\exists x)P(f(x)) \\ \gamma & = & P(c) \end{array}$$

Puede asumir sin demostrar que se cumple:

$$\vdash \alpha \wedge \gamma \to \beta$$

Indique si las siguientes afirmaciones son verdaderas o falsas. Justifique:

a. $\{\alpha, \beta, \gamma\}$ es consistente.
b. $Th(Mod(\{\alpha, \beta\}))$ es consistente maximal.
c. $Mod(\{\alpha, \gamma\}) \subseteq Mod(\beta)$.

# Propuesta de solución

A partir de asumir que se cumple $\vdash \alpha \wedge \gamma \to \beta$, podemos realizar la siguiente deducción:

$$\vdash \alpha \wedge \gamma \to \beta$$
$$\Leftrightarrow \text{ Corrección y Completitud}$$
$$\models \alpha \wedge \gamma \to \beta$$
$$\Leftrightarrow \text{ (def. de } \models)$$
$$(\bar{\forall} \mathcal{M} e.t.a)\mathcal{M} \models \alpha \wedge \gamma \to \beta$$
$$\Leftrightarrow \text{ 2.4.5. (Sentencias)}$$
$$(\bar{\forall} \mathcal{M} e.t.a)\mathcal{M} \models \alpha \wedge \gamma \Rightarrow \mathcal{M} \models \beta$$
$$\Leftrightarrow \text{ 2.4.5.}$$
$$(\bar{\forall} \mathcal{M} e.t.a)\mathcal{M} \models \alpha \text{ y } \mathcal{M} \models \gamma \Rightarrow \mathcal{M} \models \beta \textbf{ (*)}$$

**(*)** En otras palabras, toda estructura que modela a $\alpha$ y $\gamma$, modela a $\beta$.

a. $\{\alpha, \beta, \gamma\}$ es consistente. **VERDADERA**

Para demostrar esto basta con encontrar una estructura que modele al conjunto de fórmulas $\{\alpha, \beta, \gamma\}$. Y por **(*)** cualquier estructura que modele a $\alpha$ y $\gamma$, modela a $\beta$.

Sea $\mathcal{M}_1 = \langle \{\bullet\}, \{\bullet\}, id, \bullet \rangle$, veamos que $\mathcal{M}_1 \models \{\alpha, \gamma\}$.

$$\mathcal{M}_1 \models \alpha$$
$$\Leftrightarrow \text{ (def. de } \alpha)$$
$$\mathcal{M}_1 \models (\forall x)(P(x) \to f(x) =' x)$$
$$\Leftrightarrow \text{ (2.4.5 y sustitución)}$$
$$(\bar{\forall} a \in \{\bullet\})\mathcal{M}_1 \models P(\bar{a}) \to f(\bar{a}) =' \bar{a}$$
$$\Leftrightarrow \text{ (2.4.5)}$$
$$(\bar{\forall} a \in \{\bullet\})(\mathcal{M}_1 \models P(\bar{a}) \Rightarrow \mathcal{M}_1 \models f(\bar{a}) =' \bar{a})$$
$$\Leftrightarrow \text{ (def. } \models \text{ e interpretación)}$$
$$(\bar{\forall} a \in \{\bullet\})(a \in \{\bullet\} \Rightarrow id(a) = a)$$

y esto se cumple por definición de la función identidad.

$$\mathcal{M}_1 \models \gamma$$
$$\Leftrightarrow \text{ (def. de } \gamma)$$
$$\mathcal{M}_1 \models P(c)$$
$$\Leftrightarrow \text{ (def. } \models \text{ e interpretación)}$$
$$\bullet \in \{\bullet\}$$

lo que se cumple trivialmente.

Por lo tanto, encontramos una estructura $\mathcal{M}_1$ que cumple: $\mathcal{M}_1 \models \{\alpha, \gamma\}$. Y por **(*)** $\mathcal{M}_1 \models \beta$. Entonces el conjunto $\{\alpha, \beta, \gamma\}$ es consistente.

b. $Th(Mod(\{\alpha, \beta\}))$ es consistente maximal. **FALSA**

Por la parte a. el conjunto $\{\alpha, \beta, \gamma\}$ es consistente. En particular $\mathcal{M}_1 \models \{\alpha, \beta\}$, por lo tanto $\mathcal{M}_1 \models CONS(\{\alpha, \beta\})$ y esto es equivalente a $\mathcal{M}_1 \models Th(Mod(\{\alpha, \beta\}))$ **(**)**. Entonces $Th(Mod(\{\alpha, \beta\}))$ es consistente.

Falta ver que no es **maximal**. Para esto podemos agregar una fórmula que no pertenezca al conjunto y ver que este sigue siendo consistente. Por ejemplo, tomemos $\gamma$ y, en primer lugar, veamos que no pertenece a $Th(Mod(\{\alpha, \beta\}))$.

Para verificar que $\gamma \notin Th(Mod(\{\alpha, \beta\}))$ basta con probar que existe una estructura $\mathcal{M}_2$ que cumple $\mathcal{M}_2 \in Mod(\{\alpha, \beta\})$ y $\mathcal{M}_2 \not\models \gamma$. Sea $\mathcal{M}_2 = \langle \{\bullet, \circ\}, \{\bullet\}, id, \circ \rangle$, veamos que $\mathcal{M}_2 \models \{\alpha, \beta\}$ y $\mathcal{M}_2 \not\models \gamma$.

$$\begin{aligned}
&\mathcal{M}_2 \models \alpha \\
&\Leftrightarrow \text{\tiny (def. de } \alpha) \\
&\mathcal{M}_2 \models (\forall x)(P(x) \to f(x) =' x) \\
&\Leftrightarrow \text{\tiny (2.4.5 y sustitución)} \\
&(\bar{\forall} a \in \{\bullet, \circ\})\mathcal{M}_2 \models P(\bar{a}) \to f(\bar{a}) =' \bar{a} \\
&\Leftrightarrow \text{\tiny (2.4.5)} \\
&(\bar{\forall} a \in \{\bullet, \circ\})(\mathcal{M}_2 \models P(\bar{a}) \Rightarrow \mathcal{M}_2 \models f(\bar{a}) =' \bar{a}) \\
&\Leftrightarrow \text{\tiny (def. } \models \text{ e interpretación)} \\
&(\bar{\forall} a \in \{\bullet, \circ\})(a \in \{\bullet\} \Rightarrow id(a) = a)
\end{aligned}$$

Esto último se cumple por definición de la función identidad.

$$\begin{aligned}
&\mathcal{M}_2 \models \beta \\
&\Leftrightarrow \text{\tiny (def. de } \beta) \\
&\mathcal{M}_2 \models (\exists x)P(f(x)) \\
&\Leftrightarrow \text{\tiny (2.4.5 y sustitución)} \\
&(\bar{\exists} a \in \{\bullet, \circ\})\mathcal{M}_2 \models P(f(\bar{a})) \\
&\Leftrightarrow \text{\tiny (2.4.5 e interpretación)} \\
&(\bar{\exists} a \in \{\bullet, \circ\}) id(a) \in \{\bullet\}
\end{aligned}$$

Tomando el testigo del existe como $a = \bullet$ se cumple que $id(\bullet) = \bullet \in \{\bullet\}$.

$$\begin{aligned}
&\mathcal{M}_2 \not\models \gamma \\
&\Leftrightarrow \text{\tiny (def. de } \gamma) \\
&\mathcal{M}_2 \not\models P(c) \\
&\Leftrightarrow \text{\tiny (def. } \not\models \text{ e interpretación)} \\
&\circ \notin \{\bullet\}
\end{aligned}$$

Lo último se cumple trivialmente por teoría de conjuntos.

Ahora falta ver que $Th(Mod(\{\alpha, \beta\})) \cup \{\gamma\}$ es consistente. Esto se cumple por parte a. donde vimos que $\mathcal{M}_1 \models \gamma$ y **(**)** que $\mathcal{M}_1 \models Th(Mod(\{\alpha, \beta\}))$. Entonces existe $\mathcal{M}_1$, tal que $\mathcal{M}_1 \models Th(Mod(\{\alpha, \beta\})) \cup \{\gamma\}$

c. $Mod(\{\alpha, \gamma\}) \subseteq Mod(\beta)$. **VERDADERA**

Por letra sabemos que se cumple $\vdash \alpha \wedge \gamma \to \beta$, entonces:

$\vdash \alpha \wedge \gamma \to \beta$
$\Rightarrow$ (corrección)
$\vDash \alpha \wedge \gamma \to \beta$
$\Rightarrow$ (def. de $\vDash$)
$(\bar{\forall}\mathcal{M}\ e.t.a)\mathcal{M} \vDash \alpha \wedge \gamma \to \beta$
$\Rightarrow$ (2.4.5)
$(\bar{\forall}\mathcal{M}\ e.t.a)(\mathcal{M} \vDash \alpha \text{ y } \mathcal{M} \vDash \gamma \Rightarrow \mathcal{M} \vDash \beta)$
$\Rightarrow$ (def. $Mod$)
$(\bar{\forall}\mathcal{M}\ e.t.a)(\mathcal{M} \in Mod(\{\alpha, \gamma\}) \Rightarrow \mathcal{M} \in Mod(\beta))$
$\Rightarrow$ (teo. conjuntos)
$Mod(\{\alpha, \gamma\}) \subseteq Mod(\beta)$

que es lo que se quería demostrar.