# Examen de Lógica

**2 de agosto de 2024**

**Indicaciones generales**

- Apagar los celulares.
- La duración del examen es de **tres (3)** horas.
- En esta prueba **no** se permite consultar material alguno.
- **Toda respuesta debe estar fundamentada.** Pueden usarse los resultados que aparecen en el texto del curso, en esos casos debe describirse con precisión el enunciado que se utiliza.
- Numerar todas las hojas e incluir en cada una su nombre y cédula de identidad, utilizar las hojas de un solo lado, escribir con lápiz, iniciar cada ejercicio en hoja nueva y poner en la primera hoja la cantidad de hojas entregadas.

## Ejercicio 1(25 puntos)

a. Defina inductivamente el conjunto $\mathcal{LN}$ de las listas, no vacías, de naturales usando el símbolo | como separador. Ej:
   - 12 es una lista que tiene 1 elemento: el 12.
   - 1|5|18 es una lista que tiene 3 elementos: 1, 5, 18.

b. Defina una función `sust` : $\mathcal{LN} \times \mathbb{N} \to \mathcal{LN}$ tal que dada una lista $l$ y un natural $k$, devuelve el resultado de sustituir en $l$ todos los elementos menores que $k$ por el natural $k$. Ejemplo:
   - $\texttt{sust}(12, 1) = 12$.
   - $\texttt{sust}(1|5|18, 10) = 10|10|18$.

c. Demuestre por inducción que para cualquier natural $k$ mayor que cero y lista $l \in \mathcal{LN}$, se cumple que

$$\texttt{suma}(\texttt{sust}(l, k)) \geq k * \texttt{largo}(l)$$

siendo `suma` y `largo` las funciones que suman los elementos y cuentan el largo de una lista.

## Ejercicio 2 (25 puntos)

Sea un lenguaje de primer orden con igualdad, con tipo de similaridad $\langle 1; 1; 0 \rangle$, con símbolo de predicado $P$ y símbolo de función $f$, y las siguientes fórmulas:

- $\varphi := P(x)$
- $\psi := (\forall x) f(x) =' x$

Para cada una de las siguientes afirmaciones indique si son verdaderas o falsas. Justifique su respuesta.

a. $(\bar{\exists}\mathcal{M}_1 : eta)(M_1 \not\models \varphi$ y $M_1 \not\models \varphi \to \psi)$
b. $(\bar{\forall}\mathcal{M} : eta)($Si $\mathcal{M} \not\models \varphi$ entonces $\mathcal{M} \models \varphi \to \psi)$
c. $(\bar{\exists}\mathcal{M}_2 : eta)(M_2 \not\models \varphi \to \psi$ y $M_2 \models \neg\psi)$

# Ejercicio 3 (25 puntos)

Construya derivaciones que justifiquen los siguientes juicios:

a. $\vdash (\forall x)(P(c) \to P(x)) \leftrightarrow (\neg P(c) \lor (\forall x)P(x))$
b. $(\exists x)(\forall y)f(x) =' y \vdash (\forall z)(\forall y)z =' y$

**Nota:** En ningún caso se aceptan justificaciones semánticas.

# Ejercicio 4 (25 puntos)

Indique cuales de las siguientes afirmaciones son verdaderas. Justifique.

a. Existe $\Gamma \subseteq \texttt{PROP}$, teoría y no consistente
b. Existe $\Gamma \subseteq \texttt{PROP}$, completo y no teoría.
c. Existe $\Gamma \subseteq \texttt{PROP}$, teoría y no completo
d. Existe $\Gamma \subseteq \texttt{PROP}$, completo y no consistente maximal.

Recuerde que un conjunto $\Gamma$ es completo si y sólo si es consistente y para toda $\varphi \in \texttt{PROP}$ se cumple que: $\Gamma \vdash \varphi$ o $\Gamma \vdash \neg\varphi$.