

Examen de Lógica

1 de febrero de 2024

Indicaciones generales

- Apagar los celulares.
- La duración del examen es de **tres (3)** horas.
- En esta prueba **no** se permite consultar material alguno.
- **Toda respuesta debe estar fundamentada.** Pueden usarse los resultados que aparecen en el texto del curso, en esos casos debe describirse con precisión el enunciado que se utiliza.
- Numerar todas las hojas e incluir en cada una su nombre y cédula de identidad, utilizar las hojas de un solo lado, escribir con lápiz, iniciar cada ejercicio en hoja nueva y poner en la primera hoja la cantidad de hojas entregadas.

Ejercicio 1(25 puntos)

Sean los siguientes conjuntos:

- $LETRAS$, el conjunto de las consonantes y vocales del español en minúsculas.
 - CON , $CON \subseteq LETRAS$ conjunto de las consonantes del español en minúsculas.
 - $VOCAL$, $VOCAL \subseteq LETRAS$ conjunto de las vocales del español en minúsculas.
- a. Defina inductivamente el lenguaje CVC de todas las tiras de $LETRAS$ que cumplen las siguientes condiciones:
- Tienen por lo menos una vocal.
 - Empiezan y terminan en consonante.
 - Las consonantes y vocales están intercaladas, o sea: siempre tienen una sola vocal entre dos consonantes y una consonante entre dos vocales.

Ejemplo de tiras pertenecientes a CVC : *car, cametanor, telefonos, xesaj, caracol*

Ejemplo de tiras que no pertenecen CVC :

q, porque no tiene vocales.

acronimo, porque empieza en vocal y tiene 2 consonantes seguidas.

conciencia, porque tiene n y c sin vocal en medio y las parejas de vocales (i,e) y (i,a) sin consonante en el medio.

curado, porque termina en vocal.

lineal, porque hay dos vocales sin una consonante en medio.

b. Pruebe que $logicas \in CVC$

c. Defina las siguientes funciones:

- $CC : CVC \rightarrow \mathbb{N}$ tal que cuenta la cantidad de consonantes que hay en su parámetro.
- $CV : CVC \rightarrow \mathbb{N}$ tal que cuenta la cantidad de vocales que hay en su parámetro.

Ejemplos:

$CC(car) = 2$, $CC(cametanor) = 5$, $CC(xesaj) = 3$, $CC(caracol)=4$

$CV(car) = 1$, $CV(cametanor) = 4$, $CV(xesaj) = 2$, $CV(caracol)=3$

d. Pruebe inductivamente la siguiente propiedad: $(\forall w \in CVC)(CC(w) \geq CV(w))$

Ejercicio 2 (25 puntos)

Considere las siguientes fórmulas:

$$\begin{aligned}\varphi_1 &:= p \vee (q \leftrightarrow r) \\ \varphi_2 &:= (p \vee q) \leftrightarrow (p \vee r) \\ \varphi_3 &:= \neg p \wedge (\neg q \vee r)\end{aligned}$$

Determine si las siguientes afirmaciones son verdaderas o falsas. Justifique.

- Existe una valuación v_1 tal que $v_1(p) = 1$ y $v_1(\varphi_1) \neq v_1(\varphi_2)$.
- Existe una valuación v_2 tal que $v_2(\varphi_1) \neq v_2(\varphi_3)$.
- $\varphi_2 \models \varphi_3$

Ejercicio 3 (25 puntos)

Construya derivaciones que prueben los siguientes juicios.

- $(\exists x)(\neg P(x) \rightarrow Q(x, y)) \vdash (\forall x)(Q(x, y) \rightarrow P(x)) \rightarrow (\exists x)P(x)$
- $\neg r \rightarrow (\neg q \vee p), r \rightarrow p \vdash q \rightarrow p$

Nota: no se aceptan consideraciones semánticas.

Ejercicio 4 (25 puntos)

Se considera el siguiente conjunto $\Gamma \subseteq \text{PROP}$:

$$\Gamma = \{(p_i \rightarrow \neg p_i) \mid i \in \mathbb{N}\}$$

- Demuestre que:
 - Γ es consistente.
 - Γ es completo.
 - Γ no es consistente maximal.
- Determine si las siguientes afirmaciones son verdaderas o falsas. Justifique.
 - Existe un conjunto Γ_1 completo tal que $\Gamma_1 \cap \Gamma = \emptyset$.
 - Existe un conjunto Γ_2 consistente maximal tal que $\Gamma_2 \cap \Gamma = \emptyset$.
 - Existe un conjunto Γ_3 consistente maximal tal que $\Gamma_3 \cap \text{CONS}(\Gamma) = \emptyset$.

Nota: Recuerde que un conjunto Γ es completo si y solo si $(\forall \varphi \in \text{PROP})(\Gamma \vdash \varphi \text{ o } \Gamma \vdash \neg \varphi)$