Examen de Lógica

5 de diciembre de 2024

Indicaciones generales

- Apagar los celulares.
- La duración del examen es de **tres (3)** horas.
- En esta prueba **no** se permite consultar material alguno.
- **Toda respuesta debe estar fundamentada.** Pueden usarse los resultados que aparecen en el texto del curso, en esos casos debe describirse con precisión el enunciado que se utiliza.
- Numerar todas las hojas e incluir en cada una su nombre y cédula de identidad, utilizar las hojas de un solo lado, escribir con lápiz, iniciar cada ejercicio en hoja nueva y poner en la primera hoja la cantidad de hojas entregadas.

Ejercicio 1(25 puntos)

Considere el siguiente alfabeto $\Sigma = \{a, b, c\}$ y el conjunto A definido a continuación:

i $\epsilon \in A$

ii Si $x \in \Sigma$, $y \in \Sigma$ y $w \in A$, entonces $xwy \in A$

a. ¿Qué conjunto queda definido por las reglas anteriores? Escriba una frase que lo describa.

b. I. Defina la función $largo : A \to \mathbb{N}$ que dado un elemento de A devuelva la cantidad de símbolos que tiene.

   II. Defina la función $invertir : A \to A$ que dado un elemento de A devuelva el elemento con los símbolos invertidos.

   III. Defina la función $cantEspejo : A \to \mathbb{N}$ que dado un elemento w de A devuelva el largo del mayor prefijo de la primera mitad de w tal que al invertirlo es un sufijo de w.

   Ejemplos:

   - $cantEspejo(\boldsymbol{ab}cb\boldsymbol{ba}) = 2$.
   - $cantEspejo(\boldsymbol{b}cb\boldsymbol{b}) = 1$.
   - $cantEspejo(\boldsymbol{abccba}) = 3$.
   - $cantEspejo(abccbb) = 0$.

c. Demostrar que $(\bar{\forall} w \in A)(w = invertir(w) \Rightarrow largo(w) = 2 * cantEspejo(w))$.

Ejercicio 2 (25 puntos)

Sea un lenguaje de primer orden con tipo de similaridad $\langle 1; 2; 1\rangle$ con símbolo de predicado P, símbolo de función f y símbolo de constante c.
Considere las fórmulas:

$$\varphi_1 = (\forall x)P(f(x, c))$$

$$\varphi_2 = (\forall x)f(x, c) =' c$$

a. Sea $M_1 = \langle \mathbb{N}, Par, *, n\rangle$. Determine el valor de n para que que $M_1 \models \varphi_1 \wedge \varphi_2$.

b. Determine si existe m tal que $M_2 = \langle \mathbb{N}, Par, *, m\rangle$ modela $\varphi_1 \wedge \neg\varphi_2$.

c. Demuestre que $\not\models \varphi_1 \to P(y)$

Ejercicio 3 (25 puntos)

Construya derivaciones que justifiquen los siguientes juicios:

a. $(p \wedge \neg r) \to \neg q \vdash (p \wedge q) \to r$
b. $(\forall x)(\forall y)(\forall z)(R(z,x) \wedge R(z,y) \to x =' y), \neg c_1 =' c_2 \vdash \neg(\exists w)(\forall x)R(w,x)$

Nota: En ningún caso se aceptan justificaciones semánticas.

Ejercicio 4 (25 puntos)

Sea un lenguaje de primer orden con tipo de similaridad $\langle 1; 1; 1 \rangle$ con símbolo de predicado P, símbolo de función f y símbolo de constante c.
Considere las fórmulas:

$$\begin{array}{rcl} \alpha & = & (\forall x)(P(x) \to f(x) =' x) \\ \beta & = & (\exists x)P(f(x)) \\ \gamma & = & P(c) \end{array}$$

Puede asumir sin demostrar que se cumple:

$$\vdash \alpha \wedge \gamma \to \beta$$

Indique si las siguientes afirmaciones son verdaderas o falsas. Justifique:

a. $\{\alpha, \beta, \gamma\}$ es consistente.
b. $Th(Mod(\{\alpha, \beta\}))$ es consistente maximal.
c. $Mod(\{\alpha, \gamma\}) \subseteq Mod(\beta)$.