Examen de Lógica

25 de Julio de 2023

Indicaciones generales

- Apagar los celulares.
- La duración del examen es de **tres (3)** horas.
- En esta prueba **no** se permite consultar material alguno.
- **Toda respuesta debe estar fundamentada.** Pueden usarse los resultados que aparecen en el texto del curso, en esos casos debe describirse con precisión el enunciado que se utiliza.
- Numerar todas las hojas e incluir en cada una su nombre y cédula de identidad, utilizar las hojas de un solo lado, escribir con lápiz, iniciar cada ejercicio en hoja nueva y poner en la primera hoja la cantidad de hojas entregadas.

Ejercicio 1(25 puntos)

Sea un lenguaje con tipo de similaridad $\langle -; 1; 3\rangle$, con símbolo de función f y símbolos de constante c_1, c_2 y c_3, y la estructura $\mathcal{M} = \langle \mathbb{N}, F, \{0, 1, 2\}\rangle$, donde la función F es la siguiente:

$$\begin{array}{ll} F : \mathbb{N} \to \mathbb{N} & \\ F(0) & = 1 \\ F(1) & = 2 \\ F(2) & = 0 \\ F(n+3) & = n+3 \end{array}$$

a. Defina el conjunto $\mathtt{TERM}_C$ (sin constantes extendidas) para dicho tipo de similaridad.
b. Dé $t \in \mathtt{TERM}_C$ tal que $t \neq c_1$ y $t^{\mathcal{M}} = 0$.
c. Demuestre por inducción que $(\bar{\forall} t_1 \in \mathtt{TERM}_C)(\bar{\exists} t_2 \in \mathtt{TERM}_C)(t_1 \neq t_2 \text{ y } t_1^{\mathcal{M}} = t_2^{\mathcal{M}})$

Propuesta de solución

a. Se define $\mathtt{TERM}_C$ como:

   i $c_i \in \mathtt{TERM}_C$, con $i \in \{1, 2, 3\}$
   ii si $t \in \mathtt{TERM}_C$, entonces $f(t) \in \mathtt{TERM}_C$

b. Sea $t = f(c_3)$. Claramente $t \neq c_1$. Además:

$$\begin{array}{l} t^{\mathcal{M}} \\ = \text{(def. } t\text{)} \\ f(c_3)^{\mathcal{M}} \\ = \text{(def. } \mathcal{M} \text{ e interpretación de términos)} \\ F(c_3{}^{\mathcal{M}}) \\ = \text{(def. } \mathcal{M} \text{ e interpretación de términos)} \\ F(2) \\ = \text{(def. } F\text{)} \\ 0 \end{array}$$

c. Demostraremos lo pedido por inducción en $\texttt{TERM}_C$, utilizando la propiedad:

$$P(t_1) := (\bar{\exists} t_2 \in \texttt{TERM}_C)(t_1 \neq t_2 \text{ y } t_1^{\mathcal{M}} = t_2^{\mathcal{M}})$$

Paso Base

T) $P(c_i) : (\bar{\exists} t_2 \in \texttt{TERM}_C)(c_i \neq t_2 \text{ y } c_i^{\mathcal{M}} = t_2^{\mathcal{M}})$, con $i \in \{1, 2, 3\}$

Demo.

Sea $t_2 = f(f(f(c_i)))$. Claramente $c_i \neq f(f(f(c_i)))$. Además:

$c_i^{\mathcal{M}} = t_2^{\mathcal{M}}$
$\Leftrightarrow$ (def. t_2)
$c_i^{\mathcal{M}} = f(f(f(c_i)))^{\mathcal{M}}$
$\Leftrightarrow$ (def. $\mathcal{M}$ e interpretación de términos)
$c_i^{\mathcal{M}} = F(F(F(c_i^{\mathcal{M}})))$
$\Leftrightarrow$ ($i \in \{1, 2, 3\}$)
$c_1^{\mathcal{M}} = F(F(F(c_1^{\mathcal{M}})))$ y $c_2^{\mathcal{M}} = F(F(F(c_2^{\mathcal{M}})))$ y $c_3^{\mathcal{M}} = F(F(F(c_3^{\mathcal{M}})))$
$\Leftrightarrow$ (def. $\mathcal{M}$ e interpretación de términos)
$0 = F(F(F(0)))$ y $1 = F(F(F(1)))$ y $2 = F(F(F(2)))$
$\Leftrightarrow$ (def. F)
$0 = 0$ y $1 = 1$ y $2 = 2$

Lo que se cumple trivialmente.

Paso Inductivo

HI) $P(t_1) : (\bar{\exists} t_2 \in \texttt{TERM}_C)(t_1 \neq t_2 \text{ y } t_1^{\mathcal{M}} = t_2^{\mathcal{M}})$

TI) $P(f(t_1)) : (\bar{\exists} t_2' \in \texttt{TERM}_C)(f(t_1) \neq t_2' \text{ y } f(t_1)^{\mathcal{M}} = t_2'^{\mathcal{M}})$

Demo.

Por hipótesis, existe un término t_2 tal que $t_1 \neq t_2$ y $t_1^{\mathcal{M}} = t_2^{\mathcal{M}}$.
Sea $t_2' = f(t_2)$. Como $t_1 \neq t_2$, entonces $f(t_1) \neq f(t_2) = t_2'$.
Por otra parte, por hipótesis inductiva $t_1^{\mathcal{M}} = t_2^{\mathcal{M}}$, por lo que:

$F(t_1^{\mathcal{M}}) = F(t_2^{\mathcal{M}})$
$\Leftrightarrow$ (def. $\mathcal{M}$ e interpretación de términos)
$f(t_1)^{\mathcal{M}} = f(t_2)^{\mathcal{M}}$
$\Leftrightarrow$ (def. t_2')
$f(t_1)^{\mathcal{M}} = t_2'^{\mathcal{M}}$

Dado que para la propiedad definida se cumplen las hipótesis del PIP para $\texttt{TERM}_C$, se cumple que $(\bar{\forall} t_1 \in \texttt{TERM}_C)(\bar{\exists} t_2 \in \texttt{TERM}_C)(t_1 \neq t_2 \text{ y } t_1^{\mathcal{M}} = t_2^{\mathcal{M}})$.

Ejercicio 2 (25 puntos)

Sea v_1 una valuación tal que $v_1(p_i) = 1$ si y solo si i es par.
Considere $\Gamma = \{\varphi \in \texttt{PROP} | v_1(\varphi) = 1\}$.

a. Determine si las siguientes afirmaciones son verdaderas o falsas. Justifique.

I. $\Gamma \vDash p_0 \wedge p_2$
II. Para todo $\varphi \in \Gamma$, $p_0 \wedge p_2 \vDash \varphi$
III. $p_1 \vee p_4 \in \Gamma$
IV. $\neg(p_1 \vee p_4) \in \Gamma$

b. Considere un lenguaje de primer orden con tipo de similaridad $\langle 1, 1, 2; 1; 1 \rangle$ con símbolos de predicado P, Q, R, símbolo de función f y símbolo de constante c.
Sea $\mathcal{M} = \langle \texttt{PROP}, \Gamma, \textsc{Cons}(\Gamma), \{\alpha, \beta \in \texttt{PROP} | \alpha \vDash \beta\}, F_{\neg}, p_0 \wedge p_2 \rangle$ donde $F_{\neg}(\alpha) = \neg\alpha$. Determine si las siguientes afirmaciones son verdaderas o falsas. Justifique.

I. $\mathcal{M} \vDash (\forall x)(P(x) \vee P(f(x))$
II. $\mathcal{M} \vDash (\exists x)(P(x) \wedge \neg Q(x))$
III. $\mathcal{M} \vDash (\forall x)(P(x) \rightarrow R(c,x))$

Propuesta de solución

En primer término observamos que

(*) Γ es consistente maximal (caracterización semántica de consistencia maximal)

(**) v_1 es la única valuación que cumple: $v_1(\Gamma) = 1$. Esto es por ser Γ consistente maximal y por lo tanto completo.

a. I. $\Gamma \vDash p_0 \wedge p_2$
Verdadero

$$
\begin{aligned}
&\Gamma \vDash p_0 \wedge p_2 \\
&\Leftrightarrow \text{(def } \vDash\text{)} \\
&(\bar{\forall} v : val)(v(\Gamma) = 1 \Rightarrow v(p_0 \wedge p_2) = 1) \\
&\Leftrightarrow \text{(por (**))} \\
&v_1(p_0 \wedge p_2) = 1 \\
&\Leftrightarrow \text{(def. valuación)} \\
&v_1(p_0) = v_1(p_2) = 1
\end{aligned}
$$

Esta uĺtima afirmación se cumple por definición de v_1.

II. Para todo $\varphi \in \Gamma$, $p_0 \wedge p_2 \vDash \varphi$
Falso
Para probarlo, daremos una fórmula que está en Γ pero no es consecuencia lógica de $p_0 \wedge p_2$.
Sea $\varphi = p_4$. Vemos que $p_4 \in \Gamma$ por definición de Γ.
Probemos $p_0 \wedge p_2 \nvDash p_4$.
Sea la valuación v_2 que queda determinada por:

$$
v_2(p_i) = \begin{cases} 1 & i \in \{0,2\} \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}
$$

Para esta valuación se cumple que:

- $v_2(p_0 \wedge p_2) = 1$
- $v_2(p_4) = 0$

Como tenemos una valuación que asigna 1 a la premisa y 0 a la conclusión, se deduce que $p_0 \wedge p_2 \nvDash p_4$.

III. $p_1 \vee p_4 \in \Gamma$
Verdadero

$$
\begin{aligned}
&p_1 \vee p_4 \in \Gamma \\
&\Leftrightarrow \text{(def } \Gamma\text{)} \\
&v_1(p_1 \vee p_4) = 1 \\
&\Leftarrow \text{(def valuación)} \\
&v_1(p_4) = 1
\end{aligned}
$$

Esto último se cumple por definición de v_1

IV. $\neg(p_1 \vee p_4) \in \Gamma$
Falso
Por la parte anterior $v_1(p_1 \vee p_4) = 1$.
Por definición de valuación $v_1(\neg(p_1 \vee p_4)) = 0$, por lo que $\neg(p_1 \vee p_4) \notin \Gamma$ por definición de Γ

b. I. $\mathcal{M} \models (\forall x)(P(x) \vee P(f(x))$
Verdadero

$$\begin{array}{l}
\mathcal{M} \models (\forall x)(P(x) \vee P(f(x)) \\
\Leftrightarrow \text{ (2.4.5 y sustitución)} \\
(\bar{\forall}\varphi \in \texttt{PROP})(\mathcal{M} \models P(\bar{\varphi}) \vee P(f(\bar{\varphi}))) \\
\Leftrightarrow \text{ (2.4.5)} \\
(\bar{\forall}\varphi \in \texttt{PROP})(\mathcal{M} \models P(\bar{\varphi}) \text{ o } \mathcal{M} \models P(f(\bar{\varphi}))) \\
\Leftrightarrow \text{ (interpretación de fórmulas atómicas)} \\
(\bar{\forall}\varphi \in \texttt{PROP})(\varphi \in \Gamma \text{ o } f(\bar{\varphi})^{\mathcal{M}} \in \Gamma) \\
\Leftrightarrow \text{ (interpretación de términos)} \\
(\bar{\forall}\varphi \in \texttt{PROP})(\varphi \in \Gamma \text{ o } F_{\neg}(\varphi) \in \Gamma)
\end{array}$$

Por lo tanto, hay que probar que $(\bar{\forall}\varphi \in \texttt{PROP})(\varphi \in \Gamma \text{ o } \neg\varphi \in \Gamma)$.
Esto equivale a decir que Γ es consistente maximal (ejercicio del práctico 5).
Más arriba (**) vimos que en efecto Γ es consistente maximal $\square$

II. $\mathcal{M} \models (\exists x)(P(x) \wedge \neg Q(x))$
Falso

$$\begin{array}{l}
\mathcal{M} \models (\exists x)(P(x) \wedge \neg Q(x)) \\
\Leftrightarrow \text{ (2.4.5 y sustitución)} \\
(\bar{\exists}\varphi \in \texttt{PROP})(\mathcal{M} \models P(\bar{\varphi}) \wedge \neg Q(\bar{\varphi})) \\
\Leftrightarrow \text{ (2.4.5 x2)} \\
(\bar{\exists}\varphi \in \texttt{PROP})(\mathcal{M} \models P(\bar{\varphi}) \text{ y } \mathcal{M} \not\models Q(\bar{\varphi})) \\
\Leftrightarrow \text{ (interpretación de fórmulas atómicas)} \\
(\bar{\exists}\varphi \in \texttt{PROP})(\varphi \in \Gamma \text{ y } \varphi \notin \textsc{Cons}(\Gamma)) \\
\Leftrightarrow \text{ (def. de } \textsc{Cons}) \\
(\bar{\exists}\varphi \in \texttt{PROP})(\varphi \in \Gamma \text{ y } \Gamma \nvdash \varphi)
\end{array}$$

Esta última condición no puede ocurrir ya que si $\varphi \in \Gamma$ se cumple necesariamente que $\Gamma \vdash \varphi$. Por lo tanto, la afirmación es falsa.

III. $\mathcal{M} \models (\forall x)(P(x) \to R(c, x))$
Falso

$$\begin{array}{l}
\mathcal{M} \models (\forall x)(P(x) \to R(c, x)) \\
\Leftrightarrow \text{ (2.4.5 y sustitución)} \\
(\bar{\forall}\varphi \in \texttt{PROP})(\mathcal{M} \models P(\bar{\varphi}) \to R(c, \bar{\varphi})) \\
\Leftrightarrow \text{ (2.4.5)} \\
(\bar{\forall}\varphi \in \texttt{PROP})(\mathcal{M} \models P(\bar{\varphi}) \text{ entonces } \mathcal{M} \models R(c, \bar{\varphi})) \\
\Leftrightarrow \text{ (interpretación de fórmulas atómicas y términos cerrados)} \\
(\bar{\forall}\varphi \in \texttt{PROP})(\varphi \in \Gamma \text{ entonces } p_0 \wedge p_2 \models \varphi)
\end{array}$$

Y esto no se cumple por parte aII.

Ejercicio 3 (25 puntos)

Construya derivaciones que justifiquen los siguientes juicios.

a. $(\forall x)f(f(x)) =' x, (\forall x)(\forall y)(P(x,y) \to \neg P(y,x)) \vdash \neg(\exists x)P(f(f(x)),x)$

b. $\vdash \alpha \vee (\beta \vee \neg(\alpha \to \gamma)) \to (\neg\beta \to \alpha)$

Nota: En ningún caso se aceptan justificaciones semánticas.

Propuesta de solución

a. $(\forall x)f(f(x)) =' x, (\forall x)(\forall y)(P(x,y) \to \neg P(y,x)) \vdash \neg(\exists x)P(f(f(x)),x)$

$$\dfrac{\dfrac{[(\exists x)P(f(f(x)),x)]^1 \quad \dfrac{[P(f(f(x)),x)]^2 \quad \dfrac{\dfrac{\dfrac{(\forall x)(\forall y)(P(x,y) \to \neg P(y,x))}{(\forall y)(P(x,y) \to \neg P(y,x))}\,E\forall(*3)}{P(x,f(f(x))) \to \neg P(f(f(x)),x)}\,E\forall(*2) \quad \dfrac{\dfrac{(\forall x)f(f(x)) =' x}{f(f(x)) =' x}\,E\forall(*5) \quad \dfrac{\dfrac{(\forall x)f(f(x)) =' x}{f(f(x)) =' x}\,E\forall(*5)}{x =' f(f(x))}\,RI2 \quad [P(f(f(x)),x)]^2}{P(x,f(f(x)))}\,RI4(*4)}{\neg P(f(f(x)),x)}\,E\to}{\bot}\,E\neg}{\bot}\,E\exists(*1)(2)}{\neg(\exists x)P(f(f(x)),x)}\,I\neg(1)$$

(∗1) $x \notin \mathrm{FV}(\{\bot, (\forall x)f(f(x)) =' x, (\forall x)(\forall y)(P(x,y) \to \neg P(y,x))\})$
(∗2) $f(f(x))$ libre para y en $(\forall y)(P(x,y) \to \neg P(y,x))$
(∗3) x libre para x en $(\forall x)(\forall y)(P(x,y) \to \neg P(y,x))$
(∗4) $f(f(x)), x$ libres para z_1 en $P(z_1,z_2)$, $x, f(f(x))$ libres para z_2 en $P(z_1,z_2)$
(∗5) x libre para x en $f(f((x)) =' x$

b. $\vdash \alpha \vee (\beta \vee \neg(\alpha \to \gamma)) \to (\neg\beta \to \alpha)$

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{[\alpha \vee (\beta \vee \neg(\alpha \to \gamma))]^1 \quad [\alpha]^3 \quad \dfrac{[\beta \vee \neg(\alpha \to \gamma)]^3 \quad \dfrac{\dfrac{[\neg\beta]^2 \quad [\beta]^4}{\bot}\,E\neg}{\alpha}\,E\bot \quad \dfrac{\dfrac{[\neg(\alpha \to \gamma)]^4 \quad \dfrac{\dfrac{\dfrac{[\neg\alpha]^5 \quad [\alpha]^6}{\bot}\,E\neg}{\gamma}\,E\bot}{\alpha \to \gamma}\,I\to(6)}{\bot}\,E\neg}{\alpha}\,RAA(5)}{\alpha}\,E\vee(4)}{\alpha}\,E\vee(3)}{\neg\beta \to \alpha}\,I\to(2)}{\alpha \vee (\beta \vee \neg(\alpha \to \gamma)) \to (\neg\beta \to \alpha)}\,I\to(1)$$

Ejercicio 4 (25 puntos)

Se considera un lenguaje de primer orden con igualdad con tipo de similaridad $\langle 1; 1; 1\rangle$ con símbolo de predicado P, símbolo de función f y símbolo de constante c.

Sean dos estructuras:

- $\mathcal{M}_1 = \langle \{0,1\}, \{0,1\}, \mathrm{id}, 0\rangle$
- $\mathcal{M}_2 = \langle \mathbb{N}, \{0,1\}, \mathrm{id}, 1\rangle$

a. Dar una sentencia φ tal que $\varphi \in Th(\{\mathcal{M}_1, \mathcal{M}_2\})$ y $\not\models \varphi$.

b. Dar una sentencia ψ tal que $\psi \in Th(\{\mathcal{M}_1\})$ y $\psi \notin Th(\{\mathcal{M}_2\})$.

c. Pruebe que el conjunto $Th(\{\mathcal{M}_1, \mathcal{M}_2\})$ no es consistente maximal.

d. Determine un conjunto consistente maximal Δ que cumpla $\psi \in \Delta$ y $Th(\{\mathcal{M}_1, \mathcal{M}_2\}) \subset \Delta$.

Propuesta de solución

a. Tomamos $\varphi := P(c_1)$.

Primero estudiamos qué condición debe cumplir una estructura cualquiera $\mathcal{M}$ para ser modelo de φ:

$$\begin{aligned}&\mathcal{M} \models \varphi\\ &\Leftrightarrow \text{(def. de } \models)\\ &v^{\mathcal{M}}(P(c_1)) = 1\\ &\Leftrightarrow \text{(def. de } v)\\ &{c_1}^{\mathcal{M}} \in P^{\mathcal{M}} \quad (*)\end{aligned}$$

Vemos a continuación que φ cumple con lo pedido.

- φ **no es verdad lógica**. En efecto, si considero la estructura $\mathcal{M}_3 := \langle \{1\}, \emptyset, \mathrm{id}, 1\rangle$, de acuerdo con (*) vemos que:

  $$\begin{aligned}&\mathcal{M}_3 \models \varphi\\ &\Leftrightarrow \text{(por (*))}\\ &1 \in \emptyset\end{aligned}$$

  y esta última afirmación es claramente falsa. Se concluye que φ no es verdad lógica ya que existe una estructura que no la modela.
- $\mathcal{M}_1$ es modelo de φ ya que de acuerdo con (*)

  $$\begin{aligned}&\mathcal{M}_1 \models \varphi\\ &\Leftrightarrow \text{(por (*))}\\ &0 \in \{0, 1\}\end{aligned}$$

  y esta última afirmación es claramente verdadera.
- $\mathcal{M}_2$ es modelo de φ ya que de acuerdo con (*)

  $$\begin{aligned}&\mathcal{M}_2 \models \varphi\\ &\Leftrightarrow \text{(por (*))}\\ &1 \in \{0, 1\}\end{aligned}$$

  y esta última afirmación es claramente verdadera.

Como hemos probado que $\mathcal{M}_1$ y $\mathcal{M}_2$ son modelos de φ se concluye que $\varphi \in Th(\{\mathcal{M}_1, \mathcal{M}_2\})$

b. Consideramos $\psi := \forall x P(x)$.

La condición para que una estructura $\mathcal{M}$ modele a ψ está dada por:

$$\begin{aligned}&\mathcal{M} \models (\forall x)P(x)\\ &\Leftrightarrow \text{(2.4.5)}\\ &(\bar{\forall} a \in |M|)\ \mathcal{M} \models P(\bar{a})\\ &\Leftrightarrow \text{(def. de } \models)\\ &(\bar{\forall} a \in |M|\ )\ a \in P^{\mathcal{M}} \quad (**)\end{aligned}$$

De acuerdo con (**) vemos que:

- $\mathcal{M}_1 \models \psi \Leftrightarrow (\bar{\forall} a \in \{0,1\})\ a \in \{0,1\}$.
  Se cumple.
- $\mathcal{M}_2 \models \psi \Leftrightarrow (\bar{\forall} a \in \mathbb{N})\ a \in \{0,1\}$.
  No se cumple.

Por lo tanto, $\mathcal{M}_1 \models \psi$ y $\mathcal{M}_2 \not\models \psi$. Aplicando la definición de Th, se llega a que $\psi \in Th(\{\mathcal{M}_1\})$ y $\psi \notin Th(\{\mathcal{M}2\})$ como se pedía.

c. Consideramos $\Delta := Th(\{\mathcal{M}_1\})$.

Probaremos que cumple con lo solicitado:

- Δ es consistente maximal. Esto se cumple por propiedad vista en ejercicio del práctico 9: para toda estructura $\mathcal{M}$ se cumple que $Th(\{\mathcal{M}\})$ es consistente maximal.
- $\psi \in \Delta$. Ya fue probado en la parte b).
- $Th(\{\mathcal{M}_1, \mathcal{M}_2\}) \subset \Delta$.

$$\begin{array}{l} \alpha \in Th(\{\mathcal{M}_1, \mathcal{M}_2\}) \\ \Leftrightarrow \text{(def. de } Th) \\ \mathcal{M}_1 \models \alpha \text{ y } \mathcal{M}_2 \models \alpha \\ \Rightarrow \text{(conjunción)} \\ \mathcal{M}_1 \models \alpha \\ \Leftrightarrow \text{(def. de } Th) \\ \alpha \in Th(\{\mathcal{M}_1\}) \end{array}$$

De lo anterior se concluye que $Th(\{\mathcal{M}_1, \mathcal{M}_2\}) \subseteq Th(\{\mathcal{M}_1\})$.

Nota: el resultado anterior también puede probarse usando esta propiedad vista en el práctico 9: $\kappa_1 \subseteq \kappa_2 \Rightarrow Th(\kappa_2) \subseteq Th(\kappa_1)$

En la parte b) se probó que $\mathcal{M}_2 \not\models \psi$ y por lo tanto $\psi \notin Th(\{\mathcal{M}_1, \mathcal{M}_2\}$. De este modo, queda descartada la igualdad de los conjuntos y queda probada la inclusión estricta como se pedía: $Th(\{\mathcal{M}_1, \mathcal{M}_2\}) \subset Th(\{\mathcal{M}_1\})$.