Examen de Lógica

08 de Febrero de 2023

Indicaciones generales

- Apagar los celulares.
- La duración del examen es de **tres (3)** horas.
- En esta prueba **no** se permite consultar material alguno.
- **Toda respuesta debe estar fundamentada.** Pueden usarse los resultados que aparecen en el texto del curso, en esos casos debe describirse con precisión el enunciado que se utiliza.
- Numerar todas las hojas e incluir en cada una su nombre y cédula de identidad, utilizar las hojas de un solo lado, escribir con lápiz, iniciar cada ejercicio en hoja nueva y poner en la primera hoja la cantidad de hojas entregadas.

Ejercicio 1(25 puntos)

La *Notación Polaca* fue creada para eliminar los paréntesis de la lógica proposicional. En esta notación, los conectivos aparecen antes que las subfórmulas directamente involucradas en la expresión.

Por ejemplo:

- La fórmula $(p_1 \to (p_2 \to (\neg p_3)))$ se escribe en notación polaca como: $\to p_1 \to p_2 \neg p_3$.
- La fórmula $(\neg(p_1 \to (p_2 \to (\neg p_3))))$ se escribe en notación polaca como: $\neg \to p_1 \to p_2 \neg p_3$.

a. Defina el lenguaje $\texttt{PROP}_{\{\to,\neg\}}$ de la forma vista en el curso.
b. Defina el lenguaje $PN_{\{\to,\neg\}}$ de forma que sus expresiones estén en notación polaca.
c. Defina una función $Eval : PN_{\{\to,\neg\}} \times V \to \{0,1\}$ tal que recibe una expresión en notación polaca, una valuación y devuelve el valor de la expresión en esa valuación.
d. Defina la función que $I2P : \texttt{PROP}_{\{\to,\neg\}} \to PN_{\{\to,\neg\}}$ tal que transforma una fórmula de $\texttt{PROP}_{\{\to,\neg\}}$ en Notación Polaca.
e. Pruebe inductivamente que para cualquier fórmula α de $\texttt{PROP}_{\{\to,\neg\}}$ y cualquier valuación v se cumple que $v(\alpha) = Eval(I2P(\alpha), v)$.

Propuesta de solución

a. i) Si $i \in \mathbb{N}$, entonces $p_i \in \texttt{PROP}_{\{\to,\neg\}}$
ii) Si $\alpha \in \texttt{PROP}_{\{\to,\neg\}}$ y $\beta \in \texttt{PROP}_{\{\to,\neg\}}$, entonces $(\alpha \to \beta) \in \texttt{PROP}_{\{\to,\neg\}}$
iii) Si $\alpha \in \texttt{PROP}_{\{\to,\neg\}}$, entonces $(\neg\alpha) \in \texttt{PROP}_{\{\to,\neg\}}$

b. i) Si $i \in \mathbb{N}$, entonces $p_i \in PN_{\{\to,\neg\}}$
ii) Si $\alpha \in PN_{\{\to,\neg\}}$ y $\beta \in PN_{\{\to,\neg\}}$, entonces $\to \alpha\beta \in PN_{\{\to,\neg\}}$

iii) Si $\alpha \in PN_{\{\rightarrow,\neg\}}$, entonces $\neg\alpha \in PN_{\{\rightarrow,\neg\}}$

c.

$$\begin{array}{ll} Eval : PN_{\{\rightarrow,\neg\}} \times V \rightarrow \{0,1\} & \\ Eval(p_i, v) & = v(p_i) \\ Eval(\rightarrow \alpha\beta, v) & = \text{máx}(\{1 - Eval(\alpha, v), Eval(\beta, v)\}) \\ Eval(\neg\alpha, v) & = 1 - Eval(\alpha, v) \end{array}$$

d.

$$\begin{array}{ll} I2P : \texttt{PROP}_{\{\rightarrow,\neg\}} \rightarrow PN_{\{\rightarrow,\neg\}} & \\ I2P(p_i) & = p_i \\ I2P((\alpha \rightarrow \beta)) & = \rightarrow I2P(\alpha)I2P(\beta) \\ I2P((\neg\alpha)) & = \neg I2P(\alpha) \end{array}$$

e. Hay que demostrar que cualquiera sea v se cumple $\forall\alpha \in \texttt{PROP}_{\{\rightarrow,\neg\}} v(\alpha) = Eval(I2P(\alpha), v)$.

Sea v una valuación arbitraria. Probaremos la propiedad utilizando el Principio de Inducción Primitiva sobre $\texttt{PROP}_{\{\rightarrow,\neg\}}$, con la propiedad:

$$P(\alpha) \equiv v(\alpha) = Eval(I2P(\alpha), v)$$

Dem.

PB)

T) $v(p_i) = Eval(I2P(p_i), v)$

Dem.

Por definición de $Eval$ se cumple:
$v(p_i) = Eval(p_i, v) \Rightarrow$ (por definición, $I2P(p_i) = p_i$)
$v(p_i) = Eval(I2P(p_i), v)$

$\blacksquare$

PI$_\rightarrow$)

H1) $v(\alpha) = Eval(I2P(\alpha), v)$
H2) $v(\beta) = Eval(I2P(\beta), v)$

T) $v((\alpha \rightarrow \beta)) = Eval(I2P((\alpha \rightarrow \beta)), v)$

Dem.

$Eval(I2P((\alpha \rightarrow \beta)), v) =$ (def. $I2P$)
$Eval(\rightarrow I2P(\alpha)I2P(\beta), v) =$ (def. $Eval$)
$\text{máx}\{1 - Eval(I2P(\alpha), v), Eval(I2P(\beta), v)\} =$ (por H1)
$\text{máx}\{1 - v(\alpha), Eval(I2P(\beta)), v)\} =$ (por H2)
$\text{máx}\{1 - v(\alpha), v(\beta)\} =$ (def. v)
$v((\alpha \rightarrow \beta))$

■

PI$_\neg$)

H) $v(\alpha) = Eval(I2P(\alpha), v)$

T) $v((\neg\alpha)) = Eval(I2P((\neg\alpha)), v)$

Dem.

$Eval(I2P(\neg\alpha), v) =$ (def. $I2P$)
$Eval(\neg I2P(\alpha), v) =$ (def. Eval)
$1 - Eval(I2P(\alpha), v) =$ (por H)
$1 - v(\alpha) =$ (por def. v)
$v(\neg\alpha)$

■

Por el Principio de Inducción Primitiva de $\texttt{PROP}_{\{\to,\neg\}}$, se cumple la propiedad $(\bar{\forall}\alpha \in \texttt{PROP}_{\{\to,\neg\}}) v(\alpha) = Eval(I2P(\alpha), v)$.

■

Ejercicio 2 (25 puntos)

Sea un lenguaje de primer orden con tipo de similaridad $< 1; -; 1 >$. Indique si las siguientes afirmaciones son verdaderas o falsas para todo φ y ψ sentencias.

a. $\varphi \models \psi \Rightarrow \psi \models \varphi$
b. $\models \varphi \leftrightarrow \psi \Rightarrow \psi \models \varphi$ y $\varphi \models \psi$
c. $\varphi \models \psi \Rightarrow \neg\varphi \models \neg\psi$

Propuesta de solución

a. $\varphi \models \psi \Rightarrow \psi \models \varphi$
FALSO.

Vamos a probar que existen φ y ψ tales que $\varphi \models \psi$ y $\psi \not\models \varphi$.
Sean $\varphi = \bot$ y $\psi = \neg\bot$.

$\bot \models \neg\bot$ se cumple trivialmente porque ninguna estructura modela $\bot$.
$\neg\bot \not\models \bot$ se cumple porque todas las estructuras modelan $\neg\bot$ y ninguna modela a $\bot$, por lo que existe una estructura que modela a $\neg\bot$ y no modela a $\bot$.

b. $\models \varphi \leftrightarrow \psi \Rightarrow \psi \models \varphi$ y $\varphi \models \psi$
VERDADERO.

$\models \varphi \leftrightarrow \psi$
$\Leftrightarrow$ (def $\models$)
$(\bar{\forall}\mathcal{M})(\mathcal{M} \models \varphi \leftrightarrow \psi)$
$\Leftrightarrow$ (2.4.5)
$(\bar{\forall}\mathcal{M})(\mathcal{M} \models \varphi \Leftrightarrow \mathcal{M} \models \psi)$
$\Leftrightarrow$ (Semántica $\Leftrightarrow$)
$(\bar{\forall}\mathcal{M})((\mathcal{M} \models \varphi \Rightarrow \mathcal{M} \models \psi)$ y $(\mathcal{M} \models \psi \Rightarrow \mathcal{M} \models \varphi))$
$\Leftrightarrow$ (Distribución del para todo con el y)
$(\bar{\forall}\mathcal{M})(\mathcal{M} \models \varphi \Rightarrow \mathcal{M} \models \psi)$ y $(\bar{\forall}\mathcal{M})(\mathcal{M} \models \psi \Rightarrow \mathcal{M} \models \varphi)$
$\Leftrightarrow$ (def $\models$)
$\psi \models \varphi$ y $\varphi \models \psi$

c. $\varphi \models \psi \Rightarrow \neg\varphi \models \neg\psi$
FALSO.

Vamos a probar que existen φ y ψ tales que $\varphi \models \psi$ y $\neg\varphi \not\models \neg\psi$.
Sean $\varphi = \bot$ y $\psi = \neg\bot$.

$\bot \models \neg\bot$ se cumple trivialmente porque ninguna estructura modela $\bot$.
$\neg\bot \not\models \neg\neg\bot$ por doble negación es equivalente a probar $\neg\bot \not\models \bot$, y esto se cumple porque todas las estructuras modelan $\neg\bot$ y ninguna modela a $\bot$, por lo que existe una estructura que modela a $\neg\bot$ y no modela a $\bot$.

Ejercicio 3 (25 puntos)

Construya las siguientes derivaciones. No es válida ningún tipo de consideración semántica.

a. $\vdash (\varphi \vee \psi) \leftrightarrow (\neg\psi \to \varphi)$
b. $\vdash (\forall x)f(f(x)) =' x \leftrightarrow (\forall x)(\forall y)(f(x) =' y \to f(y) =' x)$

Propuesta de solución

a. $\vdash (\varphi \vee \psi) \leftrightarrow (\neg\psi \to \varphi)$

$$
\begin{prooftree}
\AxiomC{$[\varphi \vee \psi]^1$}
\AxiomC{$[\varphi]^3$}
\AxiomC{$[\psi]^3$}
\AxiomC{$[\neg\psi]^2$}
\RightLabel{$E\neg$}
\BinaryInfC{$\bot$}
\RightLabel{$E\bot$}
\UnaryInfC{φ}
\RightLabel{$E\vee_{(3)}$}
\TrinaryInfC{φ}
\RightLabel{$I\to_{(2)}$}
\UnaryInfC{$\neg\psi \to \varphi$}
\AxiomC{$[\neg(\varphi \vee \psi)]^4$}
\AxiomC{$[\neg\psi \to \varphi]^1$}
\AxiomC{$[\neg(\varphi \vee \psi)]^4$}
\AxiomC{$[\psi]^5$}
\RightLabel{$I\vee$}
\UnaryInfC{$\varphi \vee \psi$}
\RightLabel{$E\neg$}
\BinaryInfC{$\bot$}
\RightLabel{$I\neg_{(5)}$}
\UnaryInfC{$\neg\psi$}
\RightLabel{$E\to$}
\BinaryInfC{φ}
\RightLabel{$I\vee$}
\UnaryInfC{$\varphi \vee \psi$}
\RightLabel{$E\neg$}
\BinaryInfC{$\bot$}
\RightLabel{$RAA_{(4)}$}
\UnaryInfC{$\varphi \vee \psi$}
\RightLabel{$I\leftrightarrow_{(1)}$}
\BinaryInfC{$(\varphi \vee \psi) \leftrightarrow (\neg\psi \to \varphi)$}
\end{prooftree}
$$

b. $\vdash (\forall x)f(f(x)) =' x \leftrightarrow (\forall x)(\forall y)(f(x) =' y \to f(y) =' x)$

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{[(\forall x)f(f(x)) =' x]^1}{f(f(x)) =' x}E\forall^{*4} \qquad [f(x) =' y]^2}{f(y) =' x}RI4^{*3}}{f(x) =' y \to f(y) =' x}I\to_{(2)}}{(\forall y)(f(x) =' y \to f(y) =' x)}I\forall^{*2}}{(\forall x)(\forall y)(f(x) =' y \to f(y) =' x)}I\forall^{*1} \qquad \dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{[(\forall x)(\forall y)(f(x) =' y \to f(y) =' x)]^1}{(\forall y)(f(x) =' y \to f(y) =' x)}E\forall^{*7}}{f(x) =' f(x) \to f(f(x)) =' x}E\forall^{*6} \qquad \dfrac{}{f(x) =' f(x)}RI1}{f(f(x)) =' x}E\to}{(\forall x)f(f(x)) =' x}I\forall^{*5}}{(\forall x)f(f(x)) =' x \leftrightarrow (\forall x)(\forall y)(f(x) =' y \to f(y) =' x)}I\leftrightarrow_{(1)}$$

Restricciones:

(*1) x no está libre en $(\forall x)f(f(x)) =' x$.

(*2) y no está libre en $(\forall x)f(f(x)) =' x$.

(*3) y y $f(x)$ están libres para z en $f(z) =' x$.

(*4) x está libre para x en $f(f(x)) =' x$.

(*5) x no está libre en $(\forall x)(\forall y)(f(x) =' y \to f(y) =' x)$

(*6) $f(x)$ está libre para y en $f(x) =' y \to f(y) =' x$

(*7) x está libre para x en $(\forall y)(f(x) =' y \to f(y) =' x)$

Ejercicio 4 (25 puntos)

Indique cuáles de las siguientes propiedades se cumplen para todo Γ, Δ y Σ subconjuntos de $\texttt{PROP}$, tales que Γ teoría, Δ completo y Σ consistente maximal. Justifique su respuesta.

a. I. Si existe $\alpha \in \texttt{PROP}$ tal que $\alpha \notin \Gamma$ entonces $\perp \notin \Gamma$.
   II. Existe $\alpha \in \texttt{PROP}$ tal que $\alpha \notin \Sigma$.

b. I. Para todo $\alpha \notin \Delta$, $\Delta \cup \{\alpha\}$ no es completo.
   II. Para todo $\alpha \notin \Sigma$, $\Sigma \cup \{\alpha\}$ no es consistente maximal.

c. I. Para todo $\alpha \in \Gamma$, $\Gamma - \{\alpha\}$ no es una teoría.
   II. Para todo $\alpha \in \Delta$, $\Delta - \{\alpha\}$ no es completo.

Nota: Recuerde que un conjunto Δ es completo si y solo si Δ es consistente y $(\bar{\forall} \alpha \in \texttt{PROP})(\Delta \vdash \alpha \text{ o } \Delta \vdash \neg\alpha)$

Propuesta de solución

a. I. **Se cumple**.

   Sea $\alpha \in \texttt{PROP}$ tal que $\alpha \notin \Gamma$. Entonces $\Gamma \nvdash \alpha$ (por ser Γ teoría). Como existe al menos una fórmula que no se deriva de Γ puedo afirmar que Γ es consistente y por lo tanto $\perp \notin \Gamma$.

   II. **Se cumple**.

   Σ es consistente por ser consistente maximal.

   Por ser consistente: $\perp \notin \Sigma$.

   Entonces queda probado que existe una fórmula $(\perp)$ que no pertenece a Σ.

b. I. **No se cumple**.

Consideramos el siguiente contraejemplo:

- $\Delta = \{p_i \mid i \in \mathbb{N}\}$
- $\alpha = \neg\neg p_1$

Vemos que:

- Δ es completo porque hay una única valuación que asigna 1 a todos los elementos del conjunto. Esta es la valuación que asigna 1 a todas las letras proposicionales (caracterización semántica de completitud, práctico 5, ejericio 17)
- $\neg\neg p_1 \notin \Delta$ por construcción
- $\Delta \cup \{\neg\neg p_1\}$ es completo.

La última afirmación se justifica viendo que hay una única valuación que asigna 1 a todos los elementos del conjunto que es la valuación que asigna 1 a todas las letras proposicionales.

II. **Se cumple**.

De acuerdo con la definición de consistente maximal: si $\alpha \notin \Sigma$ entonces $\Sigma \cup \{\alpha\}$ es inconsistente. Por lo tanto $\Sigma \cup \{\alpha\}$ no es consistente maximal.

c. I. **Se cumple**.

Sea $\alpha \in \Gamma$ cualquiera. Probamos que $\Gamma \vdash \neg\neg\alpha$ con la siguiente derivación:

$$\dfrac{\dfrac{[\neg\alpha]^1 \quad \alpha}{\bot}\, E\neg}{\neg\neg\alpha}\, I\neg^1$$

Como Γ es una teoría: $\neg\neg\alpha \in \Gamma$.

Como $\neg\neg\alpha$ es distinta que α deducimos que $\neg\neg\alpha \in \Gamma - \{\alpha\}$.

Con la siguiente derivación probamos que $\Gamma - \{\alpha\} \vdash \alpha$:

$$\dfrac{\dfrac{\neg\neg\alpha \quad [\neg\alpha]^1}{\bot}\, E\neg}{\alpha}\, RAA^1$$

Pero $\alpha \notin \Gamma - \{\alpha\}$ y por lo tanto $\Gamma - \{\alpha\}$ no es teoría.

II. **No se cumple**.

Podemos considerar el siguiente contraejemplo:

- $\Delta = \{p_i \mid i \in \mathbb{N}\} \cup \{\neg\bot\}$
- $\alpha = \neg\bot$

Vemos que Δ es completo porque existe una única valuación que asigna 1 a todos sus elementos. Esta es la valuación que asigna 1 a todas las letras proposicionales.

Por otro lado $\Delta - \{\neg\bot\}$ es también completo si consideramos la misma valuación.