Examen de Lógica

6 de diciembre de 2023

Indicaciones generales

- Apagar los celulares.
- La duración del examen es de **tres (3)** horas.
- En esta prueba **no** se permite consultar material alguno.
- **Toda respuesta debe estar fundamentada.** Pueden usarse los resultados que aparecen en el texto del curso, en esos casos debe describirse con precisión el enunciado que se utiliza.
- Numerar todas las hojas e incluir en cada una su nombre y cédula de identidad, utilizar las hojas de un solo lado, escribir con lápiz, iniciar cada ejercicio en hoja nueva y poner en la primera hoja la cantidad de hojas entregadas.

Ejercicio 1(25 puntos)

Considere un lenguaje de primer orden con igualdad $\mathcal{L}$ con las siguientes características:

- tipo de similaridad : $\langle 1; 2, 1; 1 \rangle$
- símbolo de predicado : P
- símbolos de funciones : f, g respectivamente
- símbolo de constante : c
- conectivos: $\perp, \rightarrow$
- cuantificador: $\forall$

a. Defina el conjunto $T_1 \subseteq \texttt{TERM}_L$ tal que los elementos de T_1 son los términos de $\mathcal{L}$ que tienen como máximo dos variables, sean estas variables x, y. Por lo tanto se cumple: $(\bar{\forall} t \in T_1) V(t) \subseteq \{x, y\}$

b. Defina $\mathcal{L}_{T_1} \subseteq \mathcal{L}$ tal que las fórmulas de $\mathcal{L}_{T_1}$ tienen a lo sumo dos variables, sean estas variables x, y. Por lo tanto se cumple: $(\bar{\forall} \alpha \in \mathcal{L}_{T_1}) V(\alpha) \subseteq \{x, y\}$

c. Defina una función $conv : T_1 \rightarrow T_1$ tal que dado un elemento de T_1 sustituye todas las ocurrencias de la variable x por $g(c)$ y las ocurrencias de la variable y por $f(c, c)$.

d. Sea la estructura $\mathcal{M} = \langle \mathbb{N}, EsPar, +, pot, 2 \rangle$ donde $pot(n) = 2^n$

   I. De t_1 tal que $t_1^M = 6$.

   II. Demuestre que $(\bar{\forall} t \in T_1) \mathcal{M} \models P(conv(t))$.
   Observe que $(\bar{\forall} t \in T_1) V(conv(t)) = \emptyset$

Propuesta de solución

a. i $x \in T_1$

   ii $y \in T_1$

   iii $c \in T_1$

iv Si $t_1, t_2 \in T_1$ entonces $f(t_1, t_2) \in T_1$
v Si $t \in T_1$ entonces $g(t) \in T_1$

b. i $\perp \in \mathcal{L}_{T_1}$
ii Si $t \in T_1$ entonces $P(t) \in \mathcal{L}_{T_1}$
iii Si $t_1, t_2 \in T_1$ entonces $t_1 =' t_2 \in \mathcal{L}_{T_1}$
iv Si $\alpha, \beta \in \mathcal{L}_{T_1}$ entonces $(\alpha \to \beta) \in \mathcal{L}_{T_1}$
v Si $\alpha \in \mathcal{L}_{T_1}$ entonces $(\forall x)\alpha \in \mathcal{L}_{T_1}$
vi Si $\alpha \in \mathcal{L}_{T_1}$ entonces $(\forall y)\alpha \in \mathcal{L}_{T_1}$

c.
$$\begin{array}{ll} conv : T_1 \to T_1 & \\ conv(x) & = g(c) \\ conv(y) & = f(c, c) \\ conv(c) & = c \\ conv(f(t_1, t_2)) & = f(conv(t_1), conv(t_2)) \\ conv(g(t)) & = g(conv(t)) \end{array}$$

d. $t_1 = f(g(c), c)$

$$\begin{array}{l} (t_1)^{\mathcal{M}} \\ = \text{(def.interpretación de términos y M)} \\ (f(g(c), c))^{\mathcal{M}} \\ = \text{(def.interpretación de términos y M)} \\ (g(c))^{\mathcal{M}} + c^{\mathcal{M}} \\ = \text{(def.interpretación de términos y M)} \\ 2^{c^{\mathcal{M}}} + 2 \\ = \text{(def.interpretación de términos y M)} \\ 2^2 + 2 \\ = \\ 6 \end{array}$$

e. $(\bar{\forall} t \in T_1)\mathcal{M} \models P(conv(t))$

Se prueba realizando inducción en T_1.

$P(t) := \mathcal{M} \models P(conv(t))$

Paso Base 1

Tesis $P(x) : \mathcal{M} \models P(conv(x))$

Demo

$\mathcal{M} \models P(conv(x))$
$\Leftrightarrow$ (def.conv)
$\mathcal{M} \models P(g(c))$
$\Leftrightarrow$ (definición de $\models$)
$v^{\mathcal{M}}(P(g(c))) = 1$
$\Leftrightarrow$ (definición de $v^{\mathcal{M}}, \mathcal{M}$)
$EsPar(2^{c^{\mathcal{M}}})$
$\Leftrightarrow$ (definición de interp. términos y $\mathcal{M}$)
$EsPar(2^2)$
$\Leftrightarrow$ (aritmética)
$EsPar(4)$
$\blacksquare$

Paso Base 2

Tesis $P(y) : \mathcal{M} \models P(conv(y))$

Demo

$\mathcal{M} \models P(conv(y))$
$\Leftrightarrow$ (def.conv)
$\mathcal{M} \models P(f(c, c))$
$\Leftrightarrow$ (definición de $\models$)
$v^{\mathcal{M}}(P(f(c, c))) = 1$
$\Leftrightarrow$ (definición de $v^{\mathcal{M}}, \mathcal{M}$)
$EsPar(c^{\mathcal{M}} + c^{\mathcal{M}})$
$\Leftrightarrow$ (definición de interp. términos y $\mathcal{M}$)
$EsPar(2 + 2)$
$\Leftrightarrow$ (aritmética)
$EsPar(4)$
$\blacksquare$

Paso Base 3 **Tesis** $P(c) : \mathcal{M} \models P(conv(c))$

Demo

$\mathcal{M} \models P(conv(c))$
$\Leftrightarrow$ (def.conv)
$\mathcal{M} \models P(c)$
$\Leftrightarrow$ (definición de $\models$)
$v^{\mathcal{M}}(P(c)) = 1$
$\Leftrightarrow$ (definición de $v^{\mathcal{M}}, \mathcal{M}$)
$EsPar(c^{\mathcal{M}})$
$\Leftrightarrow$ (definición de interp. términos y $\mathcal{M}$)
$EsPar(2)$
$\blacksquare$

Paso Inductivo 1

Hipótesis $P(t_1) : \mathcal{M} \models P(conv(t_1))$, $P(t_2) : \mathcal{M} \models P(conv(t_2))$

Tesis $P(f(t_1,t_2)) : \mathcal{M} \models P(conv(f(t_1,t_2)))$

Demo

$$\begin{aligned}
&\mathcal{M} \models P(conv(f(t_1,t_2)))\\
&\Leftrightarrow \text{(def.conv)}\\
&\mathcal{M} \models P(f(conv(t_1), conv(t_2)))\\
&\Leftrightarrow \text{(definición de } \models)\\
&v^{\mathcal{M}}(P(f(conv(t_1), conv(t_2)))) = 1\\
&\Leftrightarrow \text{(definición de } v^{\mathcal{M}}, \mathcal{M})\\
&EsPar((conv(t_1))^{\mathcal{M}} + (conv(t_2))^{\mathcal{M}})\\
&\Leftarrow \text{(prop. de suma de pares es par)}\\
&EsPar((conv(t_1))^{\mathcal{M}}) \text{ y } EsPar((conv(t_2))^{\mathcal{M}})\\
&\Leftrightarrow \text{(definición de } v^{\mathcal{M}}, \mathcal{M})\\
&v^{\mathcal{M}}(P(conv(t_1))) = 1 \text{ y } v^{\mathcal{M}}(P(conv(t_2))) = 1\\
&\Leftrightarrow \text{(definición de } \models)\\
&\mathcal{M} \models P(conv(t_1)) \text{ y } \mathcal{M} \models P(conv(t_2))
\end{aligned}$$

se cumplen por Hipótesis Inductiva

■

Paso Inductivo 2

Hipótesis $P(t) : \mathcal{M} \models P(conv(t))$

Tesis $P(g(t)) : \mathcal{M} \models P(conv(g(t)))$

Demo

$$\begin{aligned}
&\mathcal{M} \models P(conv(g(t)))\\
&\Leftrightarrow \text{(def.conv)}\\
&\mathcal{M} \models P(g(conv(t)))\\
&\Leftrightarrow \text{(definición de } \models)\\
&v^{\mathcal{M}}(P(g(conv(t)))) = 1\\
&\Leftrightarrow \text{(definición de } v^{\mathcal{M}}, \mathcal{M})\\
&EsPar(2^{(conv(t_1))^{\mathcal{M}}})
\end{aligned}$$

Se cumple porque las potencias de 2 son pares (asumimos que $(\bar{\forall} t_1) conv(t_1)^{\mathcal{M}} > 0$).

■

Ejercicio 2 (25 puntos)

Indique si las siguientes afirmaciones son verdaderas o falsas para todo $\varphi \in \texttt{PROP}$ y $\psi \in \texttt{PROP}$ que cumplen:

$$\varphi \models \psi \text{ y } \models \varphi \vee \psi$$

Justifique su respuesta.

a. $\models \varphi$
b. $\models \varphi \wedge \psi$
c. $\models \psi \Rightarrow \models \varphi$
d. $\models \varphi \Rightarrow \models \psi$
e. $\psi \models \varphi$

Propuesta de solución

Considere dos fórmulas $\varphi \in \texttt{PROP}$ y $\psi \in \texttt{PROP}$ tales que:

$$\varphi \models \psi \text{ y } \models \varphi \vee \psi$$

Indique si las siguientes afirmaciones son verdaderas o falsas para todo φ y ψ que cumplan lo anterior. Justifique:

a. $\models \varphi$
FALSO.
Sea $\varphi = \bot$ y $\psi = \neg\bot$.
Hay que probar $\varphi \models \psi$ y $\models \varphi \vee \psi$ y luego que no se cumple $\models \varphi$.

$\varphi \models \psi$
$\Leftrightarrow$ (def. φ y ψ)
$\bot \models \neg\bot$
$\Leftrightarrow$ (def. $\models$)
$(\bar{\forall} v : val) v(\bot) = 1 \to v(\neg\bot) = 1$
$\Leftarrow$ (como el antecedente es falso vale el implica)
$(\bar{\forall} v : val) v(\bot) = 0$
(y esto se cumple trivialmente por definición de valuación)

$\models \varphi \vee \psi$
$\Leftrightarrow$ (def. φ y ψ)
$\models \bot \vee \neg\bot \Leftrightarrow$ (def.tautología y valuación)
$(\bar{\forall} v : val) max\{v(\bot), v(\neg\bot)\} = 1$
$\Leftarrow$ (max toma valores 0 y 1)
$(\bar{\forall} v : val) v(\neg\bot) = 1$
(y esto se cumple trivialmente por definición de valuación)

Resta probar $\not\models \varphi$, quepor definición de $\models$ quiere decir que $(\bar{\exists} v : val) v(\varphi) = 0$ lo cual se cumple por definición de φ y valuación

b. $\models \varphi \wedge \psi$
FALSO.
Considerando el contraejemplo de la parte anterior donde $\varphi = \bot$ y $\psi = \neg\bot$.

Ya probamos $\varphi \models \psi$ y $\models \varphi \lor \psi$.
Hay que probar $\not\models \varphi \land \psi$

$\not\models \varphi \land \psi$
$\Leftrightarrow$ (def. φ y ψ)
$\not\models \bot \land \neg\bot \Leftrightarrow$ (def.$\models$)
$(\bar{\exists} v : val) v(\bot \land \neg\bot) = 0$
$\Leftrightarrow$ (def val)
$(\bar{\exists} v : val) min\{v(\bot), v(\neg\bot)\} = 0$
$\Leftarrow$ (min toma valores 0 y 1)
$(\bar{\forall} v : val)(v(\bot) = 0)$
(y esto se cumple trivialmente por definición de valuación)

c. $\models \psi \Rightarrow \models \varphi$
FALSO
Considerando el contraejemplo de la parte anterior donde $\varphi = \bot$ y $\psi = \neg\bot$.
Ya probamos $\varphi \models \psi$ y $\models \varphi \lor \psi$.
Hay que probar $\models \psi$ y $\not\models \varphi$

$\models \psi$ se cumple trivialmente por definición de valuación.
$\not\models \varphi$ se cumple trivialmente por definición de valuación.

d. $\models \varphi \Rightarrow \models \psi$
VERDADERO
Supongo $\models \varphi^*$, hay que probar que se cumple $\models \psi$.

(Por hipótesis)
$\varphi \models \psi$
$\Leftrightarrow$ (def.$models$)
$(\bar{\forall} v : val) v(\varphi) = 1 \Rightarrow v(\psi) = 1$
$\Leftrightarrow$ (sea v una valuación cualquiera)
$v(\varphi) = 1 \Rightarrow v(\psi) = 1$
$\Leftrightarrow$ (por $*$)
$v(\psi) = 1$
$\Rightarrow$ (Como v es cualquiera)
$(\bar{\forall} v : val) v(\psi) = 1$
$\Leftrightarrow$ (def.$models$)
$\models \psi$

e. $\psi \models \varphi$
FALSO
Considerando el contraejemplo de la parte anterior donde $\varphi = \bot$ y $\psi = \neg\bot$.
Ya probamos $\varphi \models \psi$ y $\models \varphi \lor \psi$.
Hay que probar $\psi \not\models \varphi$

$\psi \not\models \varphi \Leftrightarrow$ (def. φ y ψ)
$\neg\bot \not\models \bot \Leftrightarrow$ (def.$\models$)
$(\bar{\exists} v : val) v(\neg\bot) = 1$ y $v(\bot) = 0$
(y esto se cumple trivialmente por definición de valuación)

Ejercicio 3 (25 puntos)

Construya derivaciones que prueben los siguientes juicios.

a. $\vdash (\forall x)(P(x) \leftrightarrow (\exists y)f(y) =' x) \rightarrow (\exists x)P(x)$
b. $\vdash (\neg p \rightarrow (\neg q \wedge r)) \rightarrow (p \leftrightarrow (q \vee (r \rightarrow p)))$

Nota: no se aceptan consideraciones semánticas.

Propuesta de solución

a. $\vdash (\forall x)(P(x) \leftrightarrow (\exists y)f(y) =' x) \rightarrow (\exists x)P(x)$

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{[(\forall x)(P(x) \leftrightarrow (\exists y)f(y) =' x)]^1}{P(f(x)) \leftrightarrow (\exists y)f(y) =' f(x)}\ E\forall^{(iii)} \qquad \dfrac{\dfrac{}{f(x) =' f(x)}\ RI1}{(\exists y)f(y) =' f(x)}\ I\exists^{(ii)}}{P(f(x))}\ E\leftrightarrow}{(\exists x)P(x)}\ I\exists^{i}}{(\forall x)(P(x) \leftrightarrow (\exists y)f(y) =' x) \rightarrow (\exists x)P(x)}\ I\rightarrow_1$$

(i): La $I\exists$ es correcta porque $f(x)$ está libre para x en $P(x)$.
(ii): La $I\exists$ es correcta porque x está libre para y en $f(y) =' f(x)$
(iii): La $I\forall$ es correcta porque $f(x)$ está libre para x en $P(x) \leftrightarrow (\exists y)f(y) =' x)$

b. $\vdash (\neg p \rightarrow (\neg q \wedge r)) \rightarrow (p \leftrightarrow (q \vee (r \rightarrow p)))$

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{[p]^2}{r \rightarrow p}\ I\rightarrow}{(q \vee (r \rightarrow p))}\ I\vee \qquad \dfrac{\dfrac{[q \vee (r \rightarrow p)]^2 \qquad \dfrac{\dfrac{\dfrac{[\neg p \rightarrow (\neg q \wedge r)]^1 \quad [\neg p]^4}{\neg q \wedge r}\ E\rightarrow}{\neg q}\ E\wedge \qquad [q]^5}{\bot}\ E\neg \qquad \dfrac{[\neg p]^4 \qquad \dfrac{[r \rightarrow p]^5 \qquad \dfrac{\dfrac{[\neg p \rightarrow (\neg q \wedge r)]^1 \quad [\neg p]^4}{\neg q \wedge r}\ E\rightarrow}{r}\ E\wedge}{p}\ E\rightarrow}{\bot}\ E\neg}{\bot}\ E\vee^5}{p}\ RAA^4}{p \leftrightarrow (q \vee (r \rightarrow p))}\ I\leftrightarrow_2}{(\neg p \rightarrow (\neg q \wedge r)) \rightarrow (p \leftrightarrow (q \vee (r \rightarrow p)))}\ I\rightarrow_1$$

Ejercicio 4 (25 puntos)

Indicar si las siguientes propiedades se cumplen o no para todo Γ y Γ' subconjuntos de `PROP` tales que $\|\Gamma\| \subseteq \|\Gamma'\|$. Justifique todas sus respuestas.

a. $\textsc{Cons}(\Gamma) \subseteq \textsc{Cons}(\Gamma')$
b. $\textsc{Cons}(\Gamma') \subseteq \textsc{Cons}(\Gamma)$
c. Si Γ' es consistente entonces Γ es consistente.
d. Si Γ' es consistente maximal entonces Γ es completo o inconsistente.

Nota: $\|\Delta\|$ (conjunto característico) es el conjunto de las valuaciones que asignan 1 a todas las fórmulas de Δ.

Propuesta de solución

a. FALSO.

Considero $\Gamma = \{\bot\}$ y $\Gamma' = \emptyset$.

Se cumple que $\|\Gamma\| = \emptyset$ y $\|\Gamma'\| = V$. Donde V es el conjunto de todas las valuaciones. Por lo tanto, se cumple $\|\Gamma\| \subseteq \|\Gamma'\|$.

Pero por otro lado $\textsc{Cons}(\Gamma) = \textsc{Cons}(\{\bot\}) = \texttt{PROP}$ y $\textsc{Cons}(\Gamma') = \textsc{Cons}(\emptyset)$ es el conjunto de todos los teoremas (tautologías).

Resulta claro que **no** se cumple $\textsc{Cons}(\Gamma) \subseteq \textsc{Cons}(\Gamma')$

b. Es VERDADERO.

Primero observamos que para toda valuación $v : v(\Gamma) = 1 \Rightarrow v(\Gamma') = 1$ $(*)$

$v(\Gamma) = 1$
$\Leftrightarrow$ (def. de $\|\_\|$)
$v \in \|\Gamma\|$
$\Rightarrow$ ($\|\Gamma\| \subseteq \|\Gamma'$)
$v \in \|\Gamma'\|$
$\Leftrightarrow$ (def. de $\|\_\|$)
$v(\Gamma') = 1$

Probamos ahora la inclusión: $\textsc{Cons}(\Gamma') \subseteq \textsc{Cons}(\Gamma)$.

Sea $\alpha \in \textsc{Cons}(\Gamma')$:

Usando definición de $\textsc{Cons}$ y correctitud sabemos que α es consecuencia lógica de Γ' y por lo tanto

$$(\bar{\forall} v : V)(v(\Gamma') = 1 \Rightarrow v(\alpha) = 1) \quad (**)$$

Sea v una valuación que cumpla $v(\Gamma) = 1$:

$v(\Gamma) = 1$
$\Rightarrow$ (por $(*)$)
$v(\Gamma') = 1$
$\Rightarrow$ (por $(**)$)
$v(\alpha) = 1$

De lo anterior, queda probado que $(\bar{\forall} v : V)(v(\Gamma) = 1 \Rightarrow v(\alpha) = 1)$.

Lo que equivale a: $\Gamma \models \alpha$.

Por completitud: $\Gamma \vdash \alpha$ y por lo tanto $\alpha \in \textsc{Cons}(\Gamma)$.

Se concluye que $(\bar{\forall} \alpha \in \textsc{Cons}(\Gamma'))\alpha \in Cons(\Gamma)$. Por lo tanto: $\textsc{Cons}(\Gamma') \subseteq \textsc{Cons}(\Gamma)$.

Otra solución: Usando el resultado del ejercicio 5b del práctico 3:

$$\Gamma \models \alpha \Leftrightarrow \|\Gamma\| \subseteq \|\alpha\|$$

$\alpha \in \textsc{Cons}(\Gamma')$
$\Leftrightarrow$ (def. de $\textsc{Cons}$)
$\Gamma' \vdash \alpha$
$\Leftrightarrow$ (correctitud)
$\Gamma' \models \alpha$
$\Leftrightarrow$ ((5b))
$\|\Gamma'\| \subseteq \|\alpha\|$
$\Rightarrow$ (transitiva de $\subseteq$)
$\|\Gamma\| \subseteq \|\alpha\|$
$\Leftrightarrow$ ((5b))
$\Gamma \models \alpha$
$\Leftrightarrow$ (completitud)
$\Gamma \vdash \alpha$
$\Leftrightarrow$ (def. $\textsc{Cons}$)
$\alpha \in \textsc{Cons}(\Gamma)$

c. Es FALSO.

Vale el mismo contraejemplo de la parte a). $\Gamma = \{\perp\}$, $\Gamma' = \emptyset$.

Se cumple:

- Γ' es consistente ya que solo deriva tautologías y por lo tanto no deriva $\perp$.
- Γ es inconsistente dado $\perp \in \Gamma$ y por lo tanto $\Gamma \vdash \perp$

d. Es VERDADERO

Γ' es completo por ser consistente maximal (resultado visto en el curso).

Por caracterización semántica de conjunto completo, existe una única valuación que asigna 1 a todos los elementos de Γ'. Sea v esa valuación. Entonces $\|\Gamma'\| = \{v\}$.

Como $\|\Gamma\| \subseteq \|\Gamma'\|$ necesariamente se da alguno de los dos casos siguientes:

- $\|\Gamma\| = \{v\}$ y entonces Γ es completo (caracterización semántica).
- $\|\Gamma\| = \emptyset$ y entonces Γ es inconsistente porque no existe valuación que asigne 1 a todos sus elementos (caracterización semántica de consistencia).