Examen de Lógica

25 de Julio de 2023

Indicaciones generales

- Apagar los celulares.
- La duración del examen es de **tres (3)** horas.
- En esta prueba **no** se permite consultar material alguno.
- **Toda respuesta debe estar fundamentada.** Pueden usarse los resultados que aparecen en el texto del curso, en esos casos debe describirse con precisión el enunciado que se utiliza.
- Numerar todas las hojas e incluir en cada una su nombre y cédula de identidad, utilizar las hojas de un solo lado, escribir con lápiz, iniciar cada ejercicio en hoja nueva y poner en la primera hoja la cantidad de hojas entregadas.

Ejercicio 1(25 puntos)

Sea un lenguaje con tipo de similaridad $\langle -; 1; 3\rangle$, con símbolo de función f y símbolos de constante c_1, c_2 y c_3, y la estructura $\mathcal{M} = \langle \mathbb{N}, F, 0, 1, 2\rangle$, donde la función F es la siguiente:

$$\begin{array}{ll} F : \mathbb{N} \to \mathbb{N} & \\ F(0) & = 1 \\ F(1) & = 2 \\ F(2) & = 0 \\ F(n+3) & = n+3 \end{array}$$

a. Defina el conjunto $\mathtt{TERM}_C$ (sin constantes extendidas) para dicho tipo de similaridad.
b. Dé $t \in \mathtt{TERM}_C$ tal que $t \neq c_1$ y $t^{\mathcal{M}} = 0$.
c. Demuestre por inducción que $(\bar{\forall} t_1 \in \mathtt{TERM}_C)(\bar{\exists} t_2 \in \mathtt{TERM}_C)(t_1 \neq t_2 \text{ y } t_1^{\mathcal{M}} = t_2^{\mathcal{M}})$

Ejercicio 2 (25 puntos)

Sea v_1 una valuación tal que $v_1(p_i) = 1$ si y solo si i es par.
Considere $\Gamma = \{\varphi \in \mathtt{PROP} | v_1(\varphi) = 1\}$.

a. Determine si las siguientes afirmaciones son verdaderas o falsas. Justifique.

   I. $\Gamma \models p_0 \wedge p_2$
   II. Para todo $\varphi \in \Gamma$, $p_0 \wedge p_2 \models \varphi$
   III. $p_1 \vee p_4 \in \Gamma$
   IV. $\neg(p_1 \vee p_4) \in \Gamma$

b. Considere un lenguaje de primer orden con tipo de similaridad $\langle 1, 1, 2; 1; 1\rangle$ con símbolos de predicado P, Q, R, símbolo de función f y símbolo de constante c.
   Sea $\mathcal{M} = \langle \mathtt{PROP}, \Gamma, \textsc{Cons}(\Gamma), \{\langle \alpha, \beta\rangle \in \mathtt{PROP} \times \mathtt{PROP} | \alpha \models \beta\}, F_{\neg}, p_0 \wedge p_2\rangle$ donde $F_{\neg}(\alpha) = \neg\alpha$. Determine si las siguientes afirmaciones son verdaderas o falsas. Justifique.

   I. $\mathcal{M} \models (\forall x)(P(x) \vee P(f(x)))$
   II. $\mathcal{M} \models (\exists x)(P(x) \wedge \neg Q(x))$
   III. $\mathcal{M} \models (\forall x)(P(x) \to R(c, x))$

Ejercicio 3 (25 puntos)

Construya derivaciones que justifiquen los siguientes juicios.

a. $(\forall x) f(f(x)) =' x, (\forall x)(\forall y)(P(x, y) \to \neg P(y, x)) \vdash \neg(\exists x) P(f(f(x)), x)$
b. $\vdash \alpha \vee (\beta \vee \neg(\alpha \to \gamma)) \to (\neg\beta \to \alpha)$

Nota: En ningún caso se aceptan justificaciones semánticas.

Ejercicio 4 (25 puntos)

Se considera un lenguaje de primer orden con igualdad con tipo de similaridad $\langle 1; 1; 1\rangle$ con símbolo de predicado P, símbolo de función f y símbolo de constante c.

Sean dos estructuras:

- $\mathcal{M}_1 = \langle \{0, 1\}, \{0, 1\}, \mathrm{id}, 0\rangle$
- $\mathcal{M}_2 = \langle \mathbb{N}, \{0, 1\}, \mathrm{id}, 1\rangle$

a. Dar una sentencia φ tal que $\varphi \in Th(\{\mathcal{M}_1, \mathcal{M}_2\})$ y $\nvDash \varphi$.
b. Dar una sentencia ψ tal que $\psi \in Th(\{\mathcal{M}_1\})$ y $\psi \notin Th(\{\mathcal{M}_2\})$.
c. Pruebe que el conjunto $Th(\{\mathcal{M}_1, \mathcal{M}_2\})$ no es consistente maximal.
d. Determine un conjunto consistente maximal Δ que cumpla $\psi \in \Delta$ y $Th(\{\mathcal{M}_1, \mathcal{M}_2\}) \subset \Delta$.