

# Examen de Lógica

08 de Febrero de 2023

## Indicaciones generales

- Apagar los celulares.
- La duración del examen es de **tres (3)** horas.
- En esta prueba **no** se permite consultar material alguno.
- **Toda respuesta debe estar fundamentada.** Pueden usarse los resultados que aparecen en el texto del curso, en esos casos debe describirse con precisión el enunciado que se utiliza.
- Numerar todas las hojas e incluir en cada una su nombre y cédula de identidad, utilizar las hojas de un solo lado, escribir con lápiz, iniciar cada ejercicio en hoja nueva y poner en la primera hoja la cantidad de hojas entregadas.

## Ejercicio 1 (25 puntos)

La *Notación Polaca* fue creada para eliminar los paréntesis de la lógica proposicional. En esta notación, los conectivos aparecen antes que las subfórmulas directamente involucradas en la expresión.

Por ejemplo:

- La fórmula  $(p_1 \rightarrow (p_2 \rightarrow (\neg p_3)))$  se escribe en notación polaca como:  $\rightarrow p_1 \rightarrow p_2 \neg p_3$  .
- La fórmula  $(\neg(p_1 \rightarrow (p_2 \rightarrow (\neg p_3))))$  se escribe en notación polaca como:  $\neg \rightarrow p_1 \rightarrow p_2 \neg p_3$  .

- Defina el lenguaje  $\text{PROP}_{\{\rightarrow, \neg\}}$  de la forma vista en el curso.
- Defina el lenguaje  $\text{PN}_{\{\rightarrow, \neg\}}$  de forma que sus expresiones estén en notación polaca.
- Defina una función  $\text{Eval} : \text{PN}_{\{\rightarrow, \neg\}} \times V \rightarrow \{0, 1\}$  tal que recibe una expresión en notación polaca, una valuación y devuelve el valor de la expresión en esa valuación.
- Defina la función que  $\text{I2P} : \text{PROP}_{\{\rightarrow, \neg\}} \rightarrow \text{PN}_{\{\rightarrow, \neg\}}$  tal que transforma una fórmula de  $\text{PROP}_{\{\rightarrow, \neg\}}$  en Notación Polaca.
- Pruebe inductivamente que para cualquier fórmula  $\alpha$  de  $\text{PROP}_{\{\rightarrow, \neg\}}$  y cualquier valuación  $v$  se cumple que  $v(\alpha) = \text{Eval}(\text{I2P}(\alpha), v)$ .

## Ejercicio 2 (25 puntos)

Sea un lenguaje de primer orden con tipo de similaridad  $\langle 1; -, 1 \rangle$ . Indique si las siguientes afirmaciones son verdaderas o falsas para todo  $\varphi$  y  $\psi$  sentencias.

- $\varphi \models \psi \Rightarrow \psi \models \varphi$
- $\models \varphi \leftrightarrow \psi \Rightarrow \psi \models \varphi$  y  $\varphi \models \psi$
- $\varphi \models \psi \Rightarrow \neg \varphi \models \neg \psi$

## Ejercicio 3 (25 puntos)

Construya las siguientes derivaciones. No es válida ningún tipo de consideración semántica.

- $\vdash (\varphi \vee \psi) \leftrightarrow (\neg \psi \rightarrow \varphi)$
- $\vdash (\forall x)f(f(x)) = x \leftrightarrow (\forall x)(\forall y)(f(x) = y \rightarrow f(y) = x)$

## Ejercicio 4 (25 puntos)

Indique cuáles de las siguientes propiedades se cumplen para todo  $\Gamma$ ,  $\Delta$  y  $\Sigma$  subconjuntos de **PROP**, tales que  $\Gamma$  teoría,  $\Delta$  completo y  $\Sigma$  consistente maximal. Justifique su respuesta.

- a. I. Si existe  $\alpha \in \mathbf{PROP}$  tal que  $\alpha \notin \Gamma$  entonces  $\perp \notin \Gamma$ .  
 II. Existe  $\alpha \in \mathbf{PROP}$  tal que  $\alpha \notin \Sigma$ .
- b. I. Para todo  $\alpha \notin \Delta$ ,  $\Delta \cup \{\alpha\}$  no es completo.  
 II. Para todo  $\alpha \notin \Sigma$ ,  $\Sigma \cup \{\alpha\}$  no es consistente maximal.
- c. I. Para todo  $\alpha \in \Gamma$ ,  $\Gamma - \{\alpha\}$  no es una teoría.  
 II. Para todo  $\alpha \in \Delta$ ,  $\Delta - \{\alpha\}$  no es completo.

**Nota:** Recuerde que un conjunto  $\Delta$  es completo si y solo si  $\Delta$  es consistente y  $(\forall \alpha \in \mathbf{PROP})(\Delta \vdash \alpha \text{ o } \Delta \vdash \neg \alpha)$