Examen de Lógica

6 de diciembre de 2023

Indicaciones generales

- Apagar los celulares.
- La duración del examen es de **tres (3)** horas.
- En esta prueba **no** se permite consultar material alguno.
- **Toda respuesta debe estar fundamentada.** Pueden usarse los resultados que aparecen en el texto del curso, en esos casos debe describirse con precisión el enunciado que se utiliza.
- Numerar todas las hojas e incluir en cada una su nombre y cédula de identidad, utilizar las hojas de un solo lado, escribir con lápiz, iniciar cada ejercicio en hoja nueva y poner en la primera hoja la cantidad de hojas entregadas.

Ejercicio 1(25 puntos)

Considere un lenguaje de primer orden con igualdad $\mathcal{L}$ con las siguientes características:

- tipo de similaridad : $\langle 1; 2, 1; 1\rangle$
- símbolo de predicado : P
- símbolos de funciones : f, g respectivamente
- símbolo de constante : c
- conectivos: $\perp, \rightarrow$
- cuantificador: $\forall$

a. Defina el conjunto $T_1 \subseteq \mathtt{TERM}_L$ tal que los elementos de T_1 son los términos de $\mathcal{L}$ que tienen como máximo dos variables, sean estas variables x, y. Por lo tanto se cumple: $(\bar{\forall} t \in T_1) V(t) \subseteq \{x, y\}$

b. Defina $\mathcal{L}_{T_1} \subseteq \mathcal{L}$ tal que las fórmulas de $\mathcal{L}_{T_1}$ tienen a lo sumo dos variables, sean estas variables x, y. Por lo tanto se cumple: $(\bar{\forall} \alpha \in \mathcal{L}_{T_1}) V(\alpha) \subseteq \{x, y\}$

c. Defina una función $conv : T_1 \rightarrow T_1$ tal que dado un elemento de T_1 sustituye todas las ocurrencias de la variable x por $g(c)$ y las ocurrencias de la variable y por $f(c, c)$.

d. Sea la estructura $\mathcal{M} = \langle \mathbb{N}, EsPar, +, pot, 2\rangle$ donde $pot(n) = 2^n$

   I. De t_1 tal que $t_1^M = 6$.

   II. Demuestre que $(\bar{\forall} t \in T_1)\mathcal{M} \models P(conv(t))$.

   Observe que $(\bar{\forall} t \in T_1) V(conv(t)) = \emptyset$

Ejercicio 2 (25 puntos)

Indique si las siguientes afirmaciones son verdaderas o falsas para todo $\varphi \in \texttt{PROP}$ y $\psi \in \texttt{PROP}$ que cumplen:

$$\varphi \models \psi \text{ y } \models \varphi \lor \psi$$

Justifique su respuesta.

a. $\models \varphi$
b. $\models \varphi \land \psi$
c. $\models \psi \Rightarrow \models \varphi$
d. $\models \varphi \Rightarrow \models \psi$
e. $\psi \models \varphi$

Ejercicio 3 (25 puntos)

Construya derivaciones que prueben los siguientes juicios.

a. $\vdash (\forall x)(P(x) \leftrightarrow (\exists y)f(y) =' x) \rightarrow (\exists x)P(x)$
b. $\vdash (\neg p \rightarrow (\neg q \land r)) \rightarrow (p \leftrightarrow (q \lor (r \rightarrow p)))$

Nota: no se aceptan consideraciones semánticas.

Ejercicio 4 (25 puntos)

Indicar si las siguientes propiedades se cumplen o no para todo Γ y Γ' subconjuntos de $\texttt{PROP}$ tales que $\|\Gamma\| \subseteq \|\Gamma'\|$. Justifique todas sus respuestas.

a. $\textsc{Cons}(\Gamma) \subseteq \textsc{Cons}(\Gamma')$
b. $\textsc{Cons}(\Gamma') \subseteq \textsc{Cons}(\Gamma)$
c. Si Γ' es consistente entonces Γ es consistente.
d. Si Γ' es consistente maximal entonces Γ es completo o inconsistente.

Nota: $\|\Delta\|$ (conjunto característico) es el conjunto de las valuaciones que asignan 1 a todas las fórmulas de Δ.