Examen de Lógica

26 de julio de 2022

Indicaciones generales

- Apagar los celulares.
- La duración del examen es de **tres (3)** horas.
- En esta prueba **no** se permite consultar material alguno.
- **Toda respuesta debe estar fundamentada.** Pueden usarse los resultados que aparecen en el texto del curso, en el teórico y en el práctico del mismo. En esos casos debe describirse con precisión el enunciado que se utiliza.
- Numerar todas las hojas e incluir en cada una su nombre y cédula de identidad, utilizar las hojas de un solo lado, escribir con lápiz, iniciar cada ejercicio en hoja nueva y poner en la primera hoja la cantidad de hojas entregadas.

Ejercicio 1(25 puntos)

Considere el conjunto $\mathbb{Z}$ de los números enteros y los símbolos $\oplus$ y $\otimes$.

a. Defina inductivamente el conjunto $\texttt{Exp}$ de las expresiones aritméticas totalmente parentizadas usando enteros, el símbolo $\oplus$ como suma y el símbolo $\otimes$ como producto. Ej: $-12 \in \texttt{Exp}$ y $(-1 \oplus (3 \otimes 5)) \in \texttt{Exp}$ pero $(-1 \oplus 3 \otimes 5) \notin \texttt{Exp}$ y $-1 \oplus (3 \otimes 5) \notin \texttt{Exp}$.

b. Defina la función $\texttt{eval} : \texttt{Exp} \to \texttt{Exp}$ tal que devuelve el valor entero de la expresión de acuerdo a la definición anterior (el símbolo $\oplus$ como suma y el símbolo $\otimes$ como producto).

c. Considere la estructura $\mathcal{M} = \langle \texttt{Exp}, \mathbb{Z}, \texttt{eval} \rangle$ y un lenguaje de primer orden del tipo adecuado. Demuestre que $\mathcal{M} \models (\forall x) P_1(f_1(x))$.

Propuesta de solución

a. El conjunto $\texttt{Exp}$ tiene que tener a los elementos de $\mathbb{Z}$ además de las expresiones que se pueden construir con $\oplus$ y $\otimes$. Por esto, la defición debería ser la siguiente:

$$\begin{array}{rc}
\text{I.} & i \in \texttt{Exp} \textbf{ si } i \in \mathbb{Z}. \\
\text{II.} & (\alpha \oplus \beta) \in \texttt{Exp} \textbf{ si } \alpha \in \texttt{Exp} \text{ y } \beta \in \texttt{Exp}. \\
\text{III.} & (\alpha \otimes \beta) \in \texttt{Exp} \textbf{ si } \alpha \in \texttt{Exp} \text{ y } \beta \in \texttt{Exp}.
\end{array}$$

b. La definición de la función $\texttt{eval} : \texttt{Exp} \to \texttt{Exp}$ sería la siguiente:

$$\begin{array}{ll}
\texttt{eval}(i) & = i \qquad \text{si } i \in \mathbb{Z} \\
\texttt{eval}((\alpha \oplus \beta)) & = \texttt{eval}(\alpha) + \texttt{eval}(\beta) \\
\texttt{eval}((\alpha \otimes \beta)) & = \texttt{eval}(\alpha) \times \texttt{eval}(\beta)
\end{array}$$

Obervación: En la definición anterior, en la segunda ecuación usamos la suma de los enteros aplicada a $\texttt{eval}(\alpha)$ y $\texttt{eval}(\beta)$ que pertenecen a $\texttt{Exp}$. Este problema puede subsanarse extendiendo la suma para $\texttt{Exp}$ de la siguiente forma: si los dos operandos son enteros se reduce a la suma de enteros, en otro caso el resultado es -1 (o cualquier otro valor). Análogo para el producto en la tercera ecuación.

c. Hay que probar el siguiente teorema:

H) $\mathcal{M} = \langle \texttt{Exp}, \mathbb{Z}, \texttt{eval} \rangle$

T) $\mathcal{M} \models (\forall x) P_1(f_1(x))$

Dem.

Aplicando 2.4.5 dos veces sobre nuestra tesis y la definición de interpretación de los términos, obtenemos que:

$$\begin{array}{rll} & \mathcal{M} \models (\forall x) P_1(f_1(x)) & \overset{2.4.5}{\Leftrightarrow} \\ (\bar{\forall} a \in \texttt{Exp}) & \mathcal{M} \models P_1(f_1(\bar{a})) & \overset{2.4.5}{\Leftrightarrow} \\ (\bar{\forall} a \in \texttt{Exp}) & f_1(\bar{a})^{\mathcal{M}} \in \mathbb{Z} & \overset{t^{\mathcal{M}}}{\Leftrightarrow} \\ (\bar{\forall} a \in \texttt{Exp}) & \texttt{eval}(a) \in \mathbb{Z} & \end{array}$$

La última afirmación aún hay que probarla y es la siguiente:

$$(\bar{\forall} a \in \texttt{Exp})\, \texttt{eval}(a) \in \mathbb{Z}$$

Para probar esta afirmación se realiza una inducción sobre $\texttt{Exp}$ con la propiedad $P(a) \equiv (\texttt{eval}(a) \in \mathbb{Z})$.

PB.

H) $i \in \texttt{Exp}$ tal que $i \in \mathbb{Z}$

T) $\texttt{eval}(i) \in \mathbb{Z}$

Dem.

Como $i \in \mathbb{Z}$, y además, por la definición de $\texttt{eval}$ se cumple que $\texttt{eval}(i) = i$ entonces se cumple que:

$$\texttt{eval}(i) \in \mathbb{Z}$$

.

■

PI$_1$

H)

$$\texttt{eval}(\alpha) \in \mathbb{Z} \tag{1}$$
$$\texttt{eval}(\beta) \in \mathbb{Z} \tag{2}$$

T)

$$\texttt{eval}((\alpha \oplus \beta)) \in \mathbb{Z}$$

Dem.

Por definición de $\texttt{eval}$ se sabe que:

$$\texttt{eval}((\alpha \oplus \beta)) = \texttt{eval}(\alpha) + \texttt{eval}(\beta)$$

Dado que la suma de enteros devuelve un entero y dadas las hipótesis 1 y 2 , se cumple que:

$$\texttt{eval}(\alpha) + \texttt{eval}(\beta) \in \mathbb{Z}$$

Por lo tanto:

$$\texttt{eval}((\alpha \oplus \beta)) \in \mathbb{Z}$$

■

PI₂

H)

$$\texttt{eval}(\alpha) \in \mathbb{Z} \tag{1}$$
$$\texttt{eval}(\beta) \in \mathbb{Z} \tag{2}$$

T)

$$\texttt{eval}((\alpha \otimes \beta)) \in \mathbb{Z}$$

Dem.

Por definición de `eval` se sabe que:

$$\texttt{eval}((\alpha \otimes \beta)) = \texttt{eval}(\alpha) \times \texttt{eval}(\beta)$$

Dado que el producto de enteros devuelve un entero y dadas las hipótesis 1 y 2 , se cumple que:

$$\texttt{eval}(\alpha) \times \texttt{eval}(\beta) \in \mathbb{Z}$$

Por lo tanto:

$$\texttt{eval}((\alpha \otimes \beta)) \in \mathbb{Z}$$

■ Dadas las demostraciones del paso base y los dos pasos inductivos, por el Principio de Inducción Primitiva de `Exp` se cumple que:

$$(\bar{\forall} a \in \texttt{Exp})\, \texttt{eval}(a) \in \mathbb{Z}$$

Y por lo tanto, se cumple:

$$\mathcal{M} \models (\forall x) P_1(f_1(x))$$

■

Ejercicio 2 (25 puntos)

En este ejercicio no se permite usar los teoremas de corrección y completitud.

a. Probar que, cualesquiera sean α, β y γ en `PROP` y $\Gamma \subseteq$ `PROP` se cumplen las siguientes propiedades.

   I. Si $\Gamma \vDash \alpha$ entonces $\Gamma, \neg\alpha \vDash \bot$

   II. Si $\alpha \wedge \beta \vDash \gamma$ entonces $\alpha \vDash \neg\beta \vee \gamma$

b. Se considera un lenguaje de primer orden con tipo de similaridad: $\langle 1; -; 0\rangle$

   Sea $\varphi := P(x)$ y $\psi = P(y)$ (x e y variables distintas)

   I. Probar que: $(\bar{\forall}\mathcal{M} : eta)(\mathcal{M} \models \varphi \Leftrightarrow \mathcal{M} \models \psi)$

   II. Probar que **no** se cumple que: φ `eq` ψ.

Propuesta de solución

a. I. Suponemos una asignación v que cumple: $v(\Gamma) = 1$.

Por hipótesis: $\Gamma \models \alpha$. Aplicando definición de consecuencia lógica: $v(\alpha) = 1$.

Por definición de valuación: $v(\neg\alpha) = 0$.

De lo anterior, se observa que toda valuación que asigne 1 a todos los elementos de Γ va a asignar 0 a $\neg\alpha$. Luego: no existe valuación v que cumpla $v(\Gamma \cup \{\neg\alpha\}) = 1$.

Entonces por *vacuidad*: para toda valuación v: si se cumple $v(\{\Gamma, \neg\alpha\}) = 1$ entonces se cumple $v(\varphi) = 1$ (cualquiera sea φ). Esto es: $(\bar{\forall}\varphi \in \texttt{PROP})\ (\Gamma, \neg\alpha \models \varphi)$.

Tomando $\varphi = \bot$ queda probado lo que se pedía.

II. Supongamos que: $\alpha \not\models \neg\beta \vee \gamma$.

Esto significa (según la definición de consecuencia lógica) que existe una valuación v tal que $v(\alpha) = 1$ y $v(\neg\beta \vee \gamma) = 0$.

Aplicando definición de valuación: $v(\neg\beta) = v(\gamma) = 0$. Por lo tanto: $v(\beta) = 1$.

Como $v(\alpha) = v(\beta) = 1$ se concluye (según definición de valuación) que $v(\alpha \wedge \beta) = 1$.

Como se cumple:

- $v(\alpha \wedge \beta) = 1$
- $v(\gamma) = 0$

Se deduce que: $\alpha \wedge \beta \not\models \gamma$ lo que contradice la hipótesis (absurdo).

Concluímos entonces que: $\alpha \models \neg\beta \vee \gamma$.

b. I. Probamos el resultado con la siguiente cadena de equivalencias:

$$
\begin{array}{lcr}
\mathcal{M} \models P(x) & \Leftrightarrow & \text{(clausura)} \\
\mathcal{M} \models (\forall x)P(x) & \Leftrightarrow & \text{(2.4.5)} \\
(\bar{\forall} a \in |\mathcal{M}|)\ \mathcal{M} \models P(\bar{a}) & \Leftrightarrow & \text{(2.4.5)} \\
\mathcal{M} \models \forall y P(y) & \Leftrightarrow & \text{(clausura)} \\
\mathcal{M} \models P(y) & &
\end{array}
$$

II. De acuerdo con la definición de `eq`:

$$
\begin{array}{lcr}
P(x)\ \texttt{eq}\ P(y) & \Leftrightarrow & \text{(definición de } \texttt{eq}) \\
\models P(x) \leftrightarrow P(y) & \Leftrightarrow & \text{(definición de } \models) \\
(\bar{\forall}\mathcal{M} : eta)\ \mathcal{M} \models P(x) \leftrightarrow P(y) & \Leftrightarrow & \text{(clausura)} \\
(\bar{\forall}\mathcal{M} : eta)\ \mathcal{M} \models (\forall x)(\forall y)(P(x) \leftrightarrow P(y)) & \Leftrightarrow & \text{(2.4.5 (x2))} \\
(\bar{\forall}\mathcal{M} : eta)(\bar{\forall} a, b \in |\mathcal{M}|)\ \mathcal{M} \models (P(\bar{a}) \leftrightarrow P(\bar{b})) & \Leftrightarrow & \text{(definición de } \models) \\
(\bar{\forall}\mathcal{M} : eta)(\bar{\forall} a, b \in |\mathcal{M}|)\ v^{\mathcal{M}}(P(\bar{a})) = v^{\mathcal{M}}(P(\bar{b})) & &
\end{array}
$$

Para probar que no se cumple lo anterior, alcanza con encontrar una estructura $\mathcal{M}$ y $a, b \in |\mathcal{M}|$ tales que: $v^{\mathcal{M}}(P(\bar{a})) \neq v^{\mathcal{M}}(P(\bar{b}))$.

Consideremos:

- $\mathcal{M} = \langle \{\triangle, \bigcirc\}, \{\triangle\} \rangle$
- $a = \triangle$
- $b = \bigcirc$

Vemos que

- $v^{\mathcal{M}}(P(\bar{a})) = 1$ ya que $\triangle \in \{\triangle\}$
- $v^{\mathcal{M}}(P(\bar{b})) = 0$ ya que $\bigcirc \notin \{\triangle\}$

Por lo tanto, queda probado que no se cumple la equivalencia entre las fórmulas $P(x)$ y $P(y)$.

Ejercicio 3 (25 puntos)

Construya las siguientes derivaciones. No es válido ningún tipo de consideración semántica.

a. $\vdash \neg(p \to q) \leftrightarrow (p \land \neg q)$

b. $\neg(\forall x)(\exists y)f(y) =' x, (\forall x)(P(x) \leftrightarrow (\exists y)f(y) =' x) \vdash (\exists x)\neg P(x)$

Propuesta de solución

a. $\vdash \neg(p \to q) \leftrightarrow (p \land \neg q)$

$$
\begin{prooftree}
\AxiomC{$[p \land \neg q]^2$}
\RightLabel{$E\land$}
\UnaryInfC{p}
\AxiomC{$[p \to q]^1$}
\RightLabel{$E\to$}
\BinaryInfC{q}
\AxiomC{$[p \land \neg q]^2$}
\RightLabel{$E\land$}
\UnaryInfC{$\neg q$}
\RightLabel{$E\neg$}
\BinaryInfC{$\bot$}
\RightLabel{$I\neg(2)$}
\UnaryInfC{$\neg(p \to q)$}
\AxiomC{$[p]^4$}
\AxiomC{$[\neg p]^3$}
\RightLabel{$E\neg$}
\BinaryInfC{$\bot$}
\RightLabel{$E\bot$}
\UnaryInfC{q}
\RightLabel{$I\to(4)$}
\UnaryInfC{$p \to q$}
\AxiomC{$[\neg(p \to q)]^1$}
\RightLabel{$E\neg$}
\BinaryInfC{$\bot$}
\RightLabel{$RAA(3)$}
\UnaryInfC{p}
\AxiomC{$[q]^5$}
\RightLabel{$I\to$}
\UnaryInfC{$p \to q$}
\AxiomC{$[\neg(p \to q)]^1$}
\RightLabel{$E\neg$}
\BinaryInfC{$\bot$}
\RightLabel{$I\neg(5)$}
\UnaryInfC{$\neg q$}
\RightLabel{$I\land$}
\BinaryInfC{$p \land \neg q$}
\RightLabel{$I\leftrightarrow(1)$}
\BinaryInfC{$\neg(p \to q) \leftrightarrow p \land \neg q$}
\end{prooftree}
$$

b. $\neg(\forall x)(\exists y)f(y) = x, (\forall x)(P(x) \leftrightarrow (\exists y)f(y) = x) \vdash (\exists x)\neg P(x)$

$$
\begin{prooftree}
\AxiomC{$\neg(\forall x)((\exists y)f(y) =' x)$}
\AxiomC{$(\forall x)(P(x) \leftrightarrow (\exists y)f(y) =' x)$}
\RightLabel{$E\forall(*2)$}
\UnaryInfC{$P(x) \leftrightarrow (\exists y)f(y) =' x$}
\AxiomC{$[\neg(\exists x)(\neg P(x))]^1$}
\AxiomC{$[\neg P(x)]^2$}
\RightLabel{$I\exists(*1)$}
\UnaryInfC{$(\exists x)(\neg P(x))$}
\RightLabel{$E\neg$}
\BinaryInfC{$\bot$}
\RightLabel{$RAA(2)$}
\UnaryInfC{$P(x)$}
\RightLabel{$E\leftrightarrow$}
\BinaryInfC{$(\exists y)f(y) =' x$}
\RightLabel{$I\forall(*3)$}
\UnaryInfC{$(\forall x)((\exists y)f(y) =' x)$}
\RightLabel{$E\neg$}
\BinaryInfC{$\bot$}
\RightLabel{$RAA(1)$}
\UnaryInfC{$(\exists x)(\neg P(x))$}
\end{prooftree}
$$

(*1) x libre para x en $\neg P(x)$

(*2) x libre para x en $P(x) \leftrightarrow (\exists y)f(y) =' x$

(*3) $x \notin FV(\{(\forall x)(P(x) \leftrightarrow (\exists y)f(y) =' x)\})$

Ejercicio 4 (25 puntos)

Considere la siguiente familia de fórmulas de PROP:

$$\varphi_i = p_{2i} \land \neg p_{2i+1} \quad (i \geq 0)$$

y el conjunto $\Gamma = \{\varphi_i / i \geq 1\}$.

Notar que $\varphi_0 = p_0 \land \neg p_1$ y que $\varphi_0 \notin \Gamma$

a. Determine si Γ es completo. En caso de no serlo, dar (si es posible) un conjunto Δ_1 tal que $\Gamma \subseteq \Delta_1$ y que Δ_1 sea completo.

   Nota: recuerde que un conjunto Γ es completo cuando es consistente y para todo $\alpha \in$ PROP, se cumple que $\Gamma \vdash \alpha$ o $\Gamma \vdash \neg\alpha$.

b. Determine si Γ es teoría. En caso de no serlo, dar (si es posible) un conjunto Δ_2 tal que $\Gamma \subseteq \Delta_2$ y que Δ_2 sea teoría y $\Delta_1 \not\subseteq \Delta_2$.

c. Determine si Γ es consistente maximal. En caso de no serlo, dar (si es posible) un conjunto Δ_3 tal que $\Gamma \subseteq \Delta_3$ y que Δ_3 sea consistente maximal.

Propuesta de solución

a. El conjunto Γ NO es completo.

La siguiente valuación satisface Γ, pero no p_0:

$$v(p_0) = v(p_1) = 0$$

$$v(p_{2i}) = 1, \quad i \geq 1$$

$$v(p_{2i+1}) = 0, \quad i \geq 1$$

Entonces (usando completitud), $\Gamma \nvdash p_0$.

Por otra parte, esta valuación satisface Γ, pero no $\neg p_0$:

$$v(p_0) = v(p_1) = 1$$

$$v(p_{2i}) = 1, \quad i \geq 1$$

$$v(p_{2i+1}) = 0, \quad i \geq 1$$

Entonces (usando completitud), $\Gamma \nvdash \neg p_0$.

Por lo tanto Γ no es completo.

Sea $\Delta_1 = \Gamma \cup \{p_0, p_1\}$. Claramente $\Gamma \subseteq \Delta_1$. Falta probar que Δ_1 es completo.

La siguiente valuación v_1 es la única que satisface Δ_1:

$$v_1(p_0) = v_1(p_1) = 1$$

$$v_1(p_{2i}) = 1, \quad i \geq 1$$

$$v_1(p_{2i+1}) = 0, \quad i \geq 1$$

Probamos primero que $v_1(\Delta_1) = 1$. Por definición de v_1, $v_1(p_0) = v_1(p_1) = 1$. Además, para cualquier $i \geq 1$:

$$\begin{array}{l} v_1(\varphi_i) \\ = \text{(def. } \varphi_i\text{)} \\ v_1(p_{2i} \land \neg p_{2i+1}) \\ = \text{(def. de valuación)} \\ min(v_1(p_{2i}), 1 - v_1(p_{2i+1})) \\ = \text{(def. } v_1\text{)} \\ min(1, 1) \\ = \text{(aritmética)} \\ 1 \end{array}$$

Luego, consideramos v_2 tal que $v_2(\Delta_1) = 1$. Entonces, tomando un $i \geq 1$ arbitrario:

$$\begin{array}{l} v_2(\varphi_i) = 1 \\ \Leftrightarrow \text{(def. } \varphi_i\text{)} \\ v_2(p_{2i} \land \neg p_{2i+1}) = 1 \\ \Leftrightarrow \text{(def. de valuación)} \\ min(v_2(p_{2i}), 1 - v_2(p_{2i+1})) = 1 \\ \Leftrightarrow \text{(aritmética)} \\ v_2(p_{2i}) = 1 \text{ y } v_2(p_{2i+1}) = 0 \end{array}$$

Como además v_2 debe cumplir $v_2(p_0) = v_2(p_1) = 1$, entonces $v_2 = v_1$.

Por lo tanto, v_1 es la única valuación que satisface Δ_1, y por caracterización semántica de completo, Δ_1 es completo.

b. El conjunto Γ no es teoría.

Consideramos el teorema $\neg\bot$. Se cumple que $\Gamma \vdash \neg\bot$, pero $\neg\bot \notin \Gamma$, por lo que Γ no puede ser teoría.

Sea $\Delta_2 = \textsc{Cons}(\Gamma)$. Δ_2 es teoría por ser un $\textsc{Cons}$. Falta probar que $\Gamma \subseteq \Delta_2$. Para esto, tomamos $\alpha \in \Gamma$ y probamos que está en Δ_2:

$$\begin{array}{l} \alpha \in \Gamma \\ \Rightarrow \text{(tomando la derivación trivial } \alpha) \\ \Gamma \vdash \alpha \\ \Rightarrow \text{(def. } \textsc{Cons}) \\ \alpha \in \textsc{Cons}(\Gamma) \\ \Rightarrow \text{(def. } \Delta_2) \\ \alpha \in \Delta_2 \end{array}$$

Por último, verificamos que $\Delta_1 \not\subseteq \Delta_2$. En efecto:

- $p_0 \in \Delta_1$ por defininción de Δ_1
- $p_0 \notin \Delta_2$ ya que $\Delta_2 = \textsc{Cons}(\Gamma)$ y $\Gamma \nvdash p_0$ (como se demostró en parte a)

c. Γ no es consistente maximal.

Por parte b, Γ no es teoría, por lo que no puede ser consistente maximal.

Por parte a, Δ_1 es completo y $\Gamma \subseteq \Delta_1$. Entonces tomando $\Delta_3 = \textsc{Cons}(\Delta_1)$ construimos un conjunto consistente maximal que incluye a Γ.