Examen de Lógica

05 de Diciembre de 2022

Indicaciones generales

- Apagar los celulares.
- La duración del examen es de **tres (3)** horas.
- En esta prueba **no** se permite consultar material alguno.
- **Toda respuesta debe estar fundamentada.** Pueden usarse los resultados que aparecen en el texto del curso, en esos casos debe describirse con precisión el enunciado que se utiliza.
- Numerar todas las hojas e incluir en cada una su nombre y cédula de identidad, utilizar las hojas de un solo lado, escribir con lápiz, iniciar cada ejercicio en hoja nueva y poner en la primera hoja la cantidad de hojas entregadas.

Ejercicio 1(30 puntos)

Se considera un lenguaje de primer orden con igualdad con tipo de similaridad $\langle 2; 2; 2\rangle$ con símbolo de predicado P, símbolo de función f y constantes c_1 y c_2.
Sea la estructura $\mathcal{M} := \langle \mathbb{N}, <, +, 0, 1\rangle$.
Se consieran los conjuntos:

- $T_0 := \{t \in \mathtt{TERM}_c \mid t^{\mathcal{M}} = 0\}$.
- $T_1 := \{t \in \mathtt{TERM}_c \mid t^{\mathcal{M}} = 1\}$

a. Dar definiciones inductivas de los conjuntos T_0 y T_1. Sugerencia: puede utilizar elementos de T_0 en la definición de T_1.

b. Suponga sin demostrar que la definición de T_0 es correcta. Esto es:

$$(\bar{\forall} t \in \mathtt{TERM}_C)(t \in T_0 \Leftrightarrow t^{\mathcal{M}} = 0) \qquad (\mathbb{A}_1)$$

Probar que la definición inductiva de T_1 dada en la parte a es correcta. Esto es:

I. $(\bar{\forall} t \in T_1)\ \ t^{\mathcal{M}} = 1$
II. $(\bar{\forall} t \in \mathtt{TERM}_C)(t^{\mathcal{M}} = 1 \Rightarrow t \in T_1)$

c. Definir la función $H : \mathtt{TERM}_C \to \mathtt{TERM}_C$ tal que $H(t)$ es el resultado de cambiar en t, todas las ocurrencias de c_2 por c_1 sin cambiar el resto de los símbolos.

Ejemplo: $H(f(f(c_1, c_1), c_2)) = f(f(c_1, c_1), c_1)$.

d. Suponga sin demostrar que:

$$(\bar{\forall} t \in T_0)\ \ H(t) = t \qquad (\mathbb{A}_2)$$

Demostrar que: $(\bar{\forall} t \in T_1)\ \ \mathcal{M} \models P(H(t), t)$

Bosquejo de solución

a. Definición de T_0

(I) $c_1 \in T_0$
(II) Si $t_1 \in T_0$ y $t_2 \in T_0$ entonces $f(t_1, t_2) \in T_0$

Definición de T_1

(I) $c_2 \in T_1$
(II) Si $t_1 \in T_0$ y $t_2 \in T_1$ entonces $f(t_1, t_2) \in T_1$
(III) Si $t_1 \in T_0$ y $t_2 \in T_1$ entonces $f(t_2, t_1) \in T_1$

b. I. Probaremos por inducción en T_1.
Definimos la propiedad a probar: $P(u) := (u^{\mathcal{M}} = 1)$.

Paso base: $P(c_2)$: ${c_2}^{\mathcal{M}} = 1$.
Se cumple por definición de $\mathcal{M}$ e interpretación de términos.

Paso inductivo:

$$\begin{array}{lll} \text{(H)} & P(t_2) & : \ {t_2}^{\mathcal{M}} = 1 \\ \text{(T)} & P(f(t_1,t_2)) & : \ f(t_1,t_2)^{\mathcal{M}} = 1 \text{ (donde } t_1 \in T_0) \end{array}$$

Demostración:

$$\begin{array}{rcll} f(t_1,t_2)^{\mathcal{M}} & = & {t_1}^{\mathcal{M}} + {t_2}^{\mathcal{M}} & \text{(def. de } \mathcal{M}) \\ & = & 0 + {t_2}^{\mathcal{M}} & (\ t_1 \in T_0 \text{ y } \mathbb{A}_1\ ) \\ & = & 0 + 1 & \text{(Hipótesis inductiva)} \\ & = & 1 & \text{(aritmética)} \end{array}$$

El otro paso inductivo se prueba de la misma manera.

II. Por inducción en $\texttt{TERM}_c$. La propiedad es $Q(u) := u^{\mathcal{M}} = 1 \Rightarrow u \in T_1$.

Pasos base

- $Q(c_1)$: ${c_1}^{\mathcal{M}} = 1 \Rightarrow c_1 \in T_1$
  Se cumple porque el antecedente de la implicancia es falso ya que ${c_1}^{\mathcal{M}} = 0$
- $Q(c_2)$: ${c_2}^{\mathcal{M}} = 1 \Rightarrow c_2 \in T_1$
  Se cumple ya que el consecuente de la implicancia es verdadero (por def. de T_1)

Pasos inductivo

$$\begin{array}{lll} \text{(H)} & Q(t_1) & : \ {t_1}^{\mathcal{M}} = 1 \Rightarrow t_1 \in T_1 \\ & Q(t_2) & : \ {t_2}^{\mathcal{M}} = 1 \Rightarrow t_2 \in T_1 \\ \text{(T)} & Q(f(t_1,t_2)) & : \ f(t_1,t_2)^{\mathcal{M}} = 1 \Rightarrow f(t_1,t_2) \in T_1 \end{array}$$

Demostración:
Suponemos $f(t_1, t_2)^{\mathcal{M}} = 1$.
Por definición de $\mathcal{M}$: $f(t_1, t_2)^{\mathcal{M}} = {t_1}^{\mathcal{M}} + {t_2}^{\mathcal{M}} = 1$.
Sabemos de la aritmética que si una suma de naturales es 1, uno de los sumandos vale 1 y el otro 0.
Suponemos: ${t_1}^{\mathcal{M}} = 0$ y ${t_2}^{\mathcal{M}} = 1$.
${t_2}^{\mathcal{M}} = 1 \Rightarrow t_2 \in T_1$ por (H).
${t_1}^{\mathcal{M}} = 0 \Rightarrow t_1 \in T_0$ por $\mathbb{A}_1$.
Por definición de T_1: $f(t_1, t_2) \in T_1$.
Para el caso ${t_1}^{\mathcal{M}} = 1$ y ${t_2}^{\mathcal{M}} = 0$ se razona de manera análoga.

c. Definición de la función H:

(I) $H(c_1) = c_1$

(II) $H(c_2) = c_1$

(III) $H(f(t_1, t_2)) = f(H(t_1), H(t_2))$

d. Voy a demostrar un lema:

Lema: $(\bar{\forall} t \in T_1)\ H(t) \in T_0$.

Demostración: Por inducción en T_1 con la propiedad $P(u) := H(u) \in T_0$.

Paso base: $P(c_2)\ :\ H(c_2) \in T_0$

$H(c_2) = c_1$ por definición de H.
$c_1 \in T_0$ por definición de T_0.

Paso inductivo

(H)	$P(t_2)$	:	$H(t_2) \in T_0$
(T)	$P(f(t_1, t_2))$	:	$H(f(t_1, t_2)) \in T_0$ (con $t_1 \in T_0$)

Demostración: $H(f(t_1, t_2)) = f(H(t_1), H(t_2))$ por definición de H.
$H(t_1) = t_1 \in T_0$ por $\mathbb{A}_2$
$H(t_2) \in T_0$ por (H)
$\Rightarrow$ (definición de T_0)
$f(H(t_1), H(t_2)) \in T_0$
$\square$

El otro paso inductivo se demuestra de la misma manera.

Una vez probado el lema, verificamos lo pedido:

Sea $t \in T_1$:

$$\begin{array}{l} \mathcal{M} \models P(H(t), t) \\ \Leftrightarrow \text{ (definición de } \models) \\ H(t)^{\mathcal{M}} < t^{\mathcal{M}} \\ \Leftrightarrow \text{ (Lema y } \mathbb{A}_1) \\ 0 < t^{\mathcal{M}} \\ \Leftrightarrow \text{ (b-I)} \\ 0 < 1 \end{array}$$

Ejercicio 2 (24 puntos)

Considere un lenguaje de primer orden con tipo de similaridad $\langle 1; -; 1 \rangle$, y las siguientes fórmulas:

$$\begin{array}{lcl} \varphi_1 & := & (\forall x)(P(x) \to \neg P(x)) \\ \varphi_2 & := & P(c) \\ \varphi_3 & := & ((\exists x)P(x)) \to P(c) \end{array}$$

Indique si las siguientes afirmaciones son verdaderas o falsas, justificando su respuesta.

a. $\varphi_1 \models \varphi_2$
b. $\varphi_1 \models \varphi_3$
c. $\varphi_3 \models \varphi_2$
d. Existe M del tipo adecuado tal que $M \models \{\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3\}$.

Bosquejo de solución

$$\begin{array}{lcl} \varphi_1 & := & (\forall x)(P(x) \to \neg P(x)) \\ \varphi_2 & := & P(c) \\ \varphi_3 & := & ((\exists x)P(x)) \to P(c) \end{array}$$

a. $\varphi_1 \models \varphi_2$
FALSO.

La afirmación es falsa si y solo si $(\bar{\exists}\mathcal{M})$ tal que $\mathcal{M} \models \varphi_1$ y $\mathcal{M} \not\models \varphi_2$.

Sea $\mathcal{M}_1 =< \{\bullet\}, \emptyset, \bullet >$. Hay que probar que $\mathcal{M}_1 \models (\forall x)(P(x) \to \neg P(x))$ y $\mathcal{M}_1 \not\models P(c)$

$\mathcal{M}_1 \models (\forall x)(P(x) \to \neg P(x))$
$\Leftrightarrow$ (2.4.5)
$(\bar{\forall} a \in \{\bullet\})\ \mathcal{M}_1 \models P(\bar{a}) \to \neg P(\bar{a})$
$\Leftrightarrow$ (2.4.5 e interpretación en $\mathcal{M}_1$)
$(\bar{\forall} a \in \{\bullet\})\ (a \in \emptyset \Rightarrow a \notin \emptyset)$
Que se cumple trivialmente por ser el antecedente falso.

$\mathcal{M}_1 \not\models P(c)$
$\Leftrightarrow$ (interpretación en $\mathcal{M}_1$)
$c \notin \emptyset$
Que se cumple trivialmente.

b. $\varphi_1 \models \varphi_3$
VERDADERO.

Si $\varphi_1 \vdash \varphi_3$ entonces se cumple que $\varphi_1 \models \varphi_3$.
Vamos a demostrar que $(\forall x)(P(x) \to \neg P(x)) \vdash ((\exists x)P(x)) \to P(c)$.

$$\begin{prooftree}
\AxiomC{$[(\exists x)P(x)]^{(1)}$}
\AxiomC{$[P(x)]^{(2)}$}
\AxiomC{$(\forall x)(P(x) \to \neg P(x))$}
\RightLabel{$E_\forall(*^2)$}
\UnaryInfC{$(P(x) \to \neg P(x))$}
\AxiomC{$P(x)$}
\RightLabel{$E_\to$}
\BinaryInfC{$\neg P(x)$}
\RightLabel{$E_\neg$}
\BinaryInfC{$\bot$}
\RightLabel{$E_\exists^{(2)}(*^1)$}
\BinaryInfC{$\bot$}
\RightLabel{$E_\bot$}
\UnaryInfC{$P(c)$}
\RightLabel{$I_\to^{(1)}$}
\UnaryInfC{$((\exists x)P(x)) \to P(c)$}
\end{prooftree}$$

$(*^1)$ x no pertenece a las variables libres de $\bot$ ni de $(\forall x)(P(x) \to \neg P(x))$.

$(*^2)$ x está libre para x en $(P(x) \to \neg P(x))$.

c. $\varphi_3 \models \varphi_2$
FALSO.

La afirmación es falsa si y solo si $(\bar{\exists}\mathcal{M})$ tal que $\mathcal{M} \models \varphi_3$ y $\mathcal{M} \not\models \varphi_2$. Hay que encontrar una estructura $\mathcal{M}_2$ que $\mathcal{M}_2 \models (\forall x)(P(x) \to \neg P(x))$ y $\mathcal{M}_2 \not\models P(c)$

Sea $\mathcal{M}_2$ igual a $\mathcal{M}_1$ usada en la parte **??**

$$\begin{array}{l}
\mathcal{M}_2 \models ((\exists x)P(x)) \to P(c) \\
\Leftrightarrow \text{ (2.4.5)} \\
\mathcal{M}_2 \models ((\exists x)P(x)) \Rightarrow \mathcal{M}_2 \models P(c) \\
\Leftrightarrow \text{ (2.4.5 e interpretación en } \mathcal{M}_2) \\
((\bar{\exists} a \in \{\bullet\}) a \in \emptyset) \Rightarrow \bullet \notin \emptyset) \\
\text{Que se cumple trivialmente por antecedente falso.}
\end{array}$$

$$\begin{array}{l}
\mathcal{M}_2 \not\models P(c) \\
\Leftrightarrow \text{ (interpretación en } \mathcal{M}_2) \\
c \notin \emptyset \\
\text{Que se cumple trivialmente.}
\end{array}$$

d. Existe M del tipo adecuado tal que $M \models \{\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3\}$.
FALSO.

Vamos a probar que $\{\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3\} \vdash \bot$, por lo que no existe ninguna estructura de tipo adecuado que modele a $\{\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3\}$.

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{(\forall x)(P(x) \to \neg P(x))}{P(c) \to \neg P(c)}\, E_\forall(*^1) \qquad P(c)}{\neg P(c)}\, E_\to \qquad P(c)}{\bot}\, E_\neg$$

$(*^1)$ c está libre para x en $(P(x) \to \neg P(x))$.

Ejercicio 3 (22 puntos)

Escriba derivaciones para

a. $\neg(\alpha \leftrightarrow \beta) \vdash \neg\alpha \vee \neg\beta$
b. $(\exists y)(\forall x)(f(x) =' y) \vdash (\exists z)(f(z) =' z)$

No se aceptarán consideraciones semánticas.

Bosquejo de solución

a. $\neg(\alpha \leftrightarrow \beta) \vdash \neg\alpha \vee \neg\beta$

$$
\begin{prooftree}
\AxiomC{$[\neg(\neg\alpha \vee \neg\beta)]^1$}
\AxiomC{$[\neg(\neg\alpha \vee \neg\beta)]^1$}
\AxiomC{$\neg(\alpha \leftrightarrow \beta)$}
\AxiomC{$[\alpha]^2$}
\AxiomC{$[\beta]^3$}
\RightLabel{$\leftrightarrow I$}
\BinaryInfC{$\alpha \leftrightarrow \beta$}
\RightLabel{$\neg E$}
\BinaryInfC{$\bot$}
\RightLabel{$\neg I_3$}
\UnaryInfC{$\neg\beta$}
\RightLabel{$\vee I$}
\UnaryInfC{$\neg\alpha \vee \neg\beta$}
\RightLabel{$\neg E$}
\BinaryInfC{$\bot$}
\RightLabel{$\neg I_2$}
\UnaryInfC{$\neg\alpha$}
\RightLabel{$\vee I$}
\UnaryInfC{$\neg\alpha \vee \neg\beta$}
\RightLabel{$\neg E$}
\BinaryInfC{$\bot$}
\RightLabel{RAA_1}
\UnaryInfC{$\neg\alpha \vee \neg\beta$}
\end{prooftree}
$$

b. $(\exists y)(\forall x)(f(x) =' y) \vdash (\exists z)(f(z) =' z)$

$$
\begin{prooftree}
\AxiomC{$(\exists y)(\forall x)(f(x) =' y)$}
\AxiomC{$[(\forall x)(f(x) =' y)]^1$}
\RightLabel{$\forall E^{(*1)}$}
\UnaryInfC{$f(y) =' y$}
\RightLabel{$\exists I^{(*2)}$}
\UnaryInfC{$(\exists z)(f(z) =' z)$}
\RightLabel{$\exists E_1^{(*3)}$}
\BinaryInfC{$(\exists z)(f(z) =' z)$}
\end{prooftree}
$$

(∗1) y libre para x en $f(x) =' y$

(∗2) y libre para z en $f(z) =' z$

(∗3) $y \notin FV(\{(\exists z)(f(z) =' z)\})$

Ejercicio 4 (24 puntos)

Sea Δ el siguiente conjunto:

$$\Delta = \{(p_i \vee p_j) |\ i \in \mathbb{N}, j \in \mathbb{N}, i < j\}$$

a. Considere la siguiente valuación:

$$\begin{array}{rrcl} & v(p_0) & = & 0 \\ \forall i > 0 & v(p_i) & = & 1 \end{array}$$

Determine si $v(\Delta) = 1$. Justifique su respuesta.

b. Indique si Δ es completo o no. Justifique.

c. Defina un conjunto Γ finito y consistente tal que: $(\Delta \cup \Gamma)$ sea inconsistente.

d. Defina un conjunto Σ que cumpla las siguientes condiciones, justificando su respuesta:

- $\Sigma \cap \Delta = \emptyset$
- $\Delta \subseteq \textsc{Cons}(\Sigma)$
- $\textsc{Cons}(\Sigma)$ es consistente maximal.

Bosquejo de solución

a. Considere la siguiente valuación:

$$\begin{array}{rrcl} & v(p_0) & = & 0 \\ \forall i > 0 & v(p_i) & = & 1 \end{array}$$

Determine si $v(\Delta) = 1$. Justifique su respuesta.

Sea $p_i \vee p_j$ un elemento cualquiera de Δ.
Como $p_i \vee p_j \in \Delta$ por definición se sabe que $i < j$.

- Si $i = 0$, necesariamente $j \neq 0$ porque $i < j$. Por lo tanto $v(p_j) = 1$ y por definición de valuación $v(p_i \vee p_j) = 1$.
- Si $i \neq 0$ entonces $v(p_i) = v(p_j) = 1$ y por definición de valuación $v(p_i \vee p_j) = 1$.

Observar que j no puede ser 0 porque por definición de Δ, $i < j$ con $i \in \mathbb{N}$. Por lo tanto las opciones mencionadas anteriormente son las únicas y $v(\Delta) = 1$.

b. Indique si Δ es completo o no. Justifique. Por parte **??** se sabe que $v(\Delta) = 1$.

Se considera la valuación v_1 tal que $(\forall i \in \mathbb{N})\ v_1(p_i) = 1$. Trivialmente $v(\Delta) = 1$.
Observar que v y v_1 son diferentes ya que $v(p_0) \neq v_1(p_0)$.

Por lo tanto, hay al menos dos valuaciones diferentes v y v_1 tales que $v(\Delta) = v_1(\Delta) = 1$, por lo que Δ no es completo.

c. Defina un conjunto Γ finito y consistente
tal que: $(\Delta \cup \Gamma)$ sea inconsistente.

Sea $\Gamma = \{\neg(p_0 \vee p_1)\}$. Hay que mostrar que Γ es finito y consistente y que $(\Delta \cup \Gamma)$ es inconsistente.

Γ es trivialmente finito porque tiene un único elemento. Además, Γ es consistente ya que la valuación v_2 tal que $v_2(p_0) = v_2(p_1) = 0$ cumple que $v_2(\neg(p_0 \vee p_1)) = 1$ y por lo tanto $v_2(\Gamma) = 1$.

Vamos a probar $\Delta \cup \Gamma$ es inconsistente, es decir $\Delta \cup \Gamma \vdash \bot$

$$\frac{\neg(p_0 \vee p_1) \quad (p_0 \vee p_1)}{\bot}\ E_{\neg}$$

$\neg(p_0 \vee p_1) \in \Gamma$ por definición y como $0 < 1$, $p_0 \vee p_1 \in \Delta$ por definición.

d. Defina un conjunto Σ que cumpla las siguientes condiciones, justificando su respuesta:

- $\Sigma \cap \Delta = \emptyset$
- $\Delta \subseteq \textsc{Cons}(\Sigma)$
- $\textsc{Cons}(\Sigma)$ es consistente maximal.

Sea $\Sigma = \{p_i | i \in \mathbb{N}\}$.

- $\Sigma \cap \Delta = \emptyset$. Esto se cumple trivialmente ya que las fórmulas de Δ son de la forma $p_i \vee p_j$.

- $\Delta \subseteq$ Cons(Σ). Para que esto se cumpla, por definición de Cons debe pasar que $(\bar{\forall}\varphi \in \Delta)\ \Sigma \vdash \varphi$
  Sea $p_i \vee p_j$ un elemento cualquiera de Δ. Vamos a demostrar $\Sigma \vdash p_i \vee p_j$.

  $$\frac{p_i}{p_i \vee p_j}\ I_\vee$$

  Observar que $p_i \in \Sigma$.

- Cons(Σ) es consistente maximal. Σ es completo porque existe una única valuación que cumple $v(\Sigma) = 1$. Por lo tanto, por ejercicio de práctico 5, Cons(Σ) es consistente maximal.