Examen de Lógica

09 de Febrero de 2022

Indicaciones generales

- La duración de esta parte del examen es de **una hora y media**.
- En esta prueba **no** se permite consultar material alguno.
- Puntaje: **100** puntos.
- **Toda respuesta debe estar fundamentada.** Pueden usarse los resultados que aparecen en el texto del curso, en esos casos debe describirse con precisión el enunciado que se utiliza.
- Incluir en la primera hoja de las soluciones una foto de la CI.

Ejercicio 1(25 puntos)

Sean los siguientes subconjuntos de PROP:

- $\texttt{TAUTO} = \{\varphi \in \texttt{PROP}/\varphi \text{ es una tautología}\}$
- $\texttt{CONTR} = \{\varphi \in \texttt{PROP}/\varphi \text{ es una contradicción}\}$

Sea L un lenguaje de primer orden tal que $\mathcal{M}_1 = \langle \texttt{PROP}, \texttt{CONTR}, F_\vee, p_0, \neg p_0\rangle$ es una estructura adecuada para ese lenguaje, donde $F_\vee$ esta definido de la siguiente forma: $F_\vee(\varphi, \beta) = (\varphi \vee \beta)$

a. Determine el tipo de similaridad de la estructura $\mathcal{M}_1$. Justifique su respuesta.

b. Escriba la definición del conjunto $\texttt{TERM}_C$ de los términos cerrados (sin constantes extendidas) para el lenguaje L.

c. Defina una función recursiva $\texttt{Cant}_f$ tal que cuente la cantidad de símbolos de función en un elemento de $\texttt{TERM}_C$.

d. Demuestre o refute las siguientes afirmaciones:

   I. Para todo $t \in \texttt{TERM}_C$ se cumple que $\mathcal{M}_1 \models \neg P_1(t)$.

   II. Para todo $t \in \texttt{TERM}_C$ se cumple que si $\texttt{Cant}_f(t) \geq 1$ entonces $t^{\mathcal{M}_1} \in \texttt{TAUTO}$.

Bosquejo de solución

a. El tipo de similaridad de la estructura es $\langle 1; 2; 2\rangle$, ya que:

   - CONTR es un predicado unario.
   - $F_\vee$ es una función binaria.
   - La estructura cuenta con dos constantes distinguidas.

b. I. $c_1 \in \texttt{TERM}_C$

   II. $c_2 \in \texttt{TERM}_C$

   III. Si $t_1, t_2 \in \texttt{TERM}_C$, entonces $f_1(t_1, t_2) \in \texttt{TERM}_C$

c. $\texttt{Cant}_f : \texttt{TERM}_C \to \mathbb{N}$

   I. $\texttt{Cant}_f(c_1) = 0$

   II. $\texttt{Cant}_f(c_2) = 0$

   III. $\texttt{Cant}_f(f_1(t_1, t_2)) = 1 + \texttt{Cant}_f(t_1) + \texttt{Cant}_f(t_2)$

d. I. La afirmación es verdadera, y la demostraremos utilizando el PIP sobre $\texttt{TERM}_C$.
La propiedad a probar es la siguiente:

$$Q(t) := \mathcal{M}_1 \models \neg P_1(t)$$

Transformaremos dicha propiedad a una propiedad equivalente:

$$\begin{aligned}
&\mathcal{M}_1 \models \neg P_1(t) \\
&\Leftrightarrow \text{(Por (2.4.5) y } t \in \texttt{TERM}_C\text{)} \\
&\mathcal{M}_1 \not\models P_1(t) \\
&\Leftrightarrow \text{(Def. } \models\text{)} \\
&v^{\mathcal{M}_1}(P_1(t)) = 0 \\
&\Leftrightarrow \text{(Def. } v^{\mathcal{M}_1} \text{ y } \mathcal{M}_1\text{)} \\
&t^{\mathcal{M}_1} \notin \texttt{CONTR} \\
&\Leftrightarrow \text{(Def. de } \texttt{CONTR} \text{ y } \texttt{PROP}\text{)} \\
&\text{Existe } v \text{ valuación tal que } v(t^{\mathcal{M}_1}) = 1
\end{aligned}$$

La propiedad con la que trabajaremos durante la demostración es:

$$Q(t) := \text{Existe } v \text{ valuación tal que } v(t^{\mathcal{M}_1}) = 1$$

Paso Base 1

T) $Q(c_1) =$ Existe v valuación tal que $v(c_1^{\mathcal{M}_1}) = 1$

Demo)

Tenemos que $c_1^{\mathcal{M}_1} = p_0$. Basta con tomar una valuación v cualquiera que cumpla $v(p_0) = 1$ para probar que se cumple la tesis.

Paso Base 2

T) $Q(c_2) =$ Existe v valuación tal que $v(c_2^{\mathcal{M}_1}) = 1$

Demo)

Tenemos que $c_2^{\mathcal{M}_2} = \neg p_0$. Basta con tomar una valuación v cualquiera que cumpla $v(p_0) = 0$ para probar que se cumple la tesis.

Paso Inductivo

HI1) $Q(t_1) =$ Existe v_1 valuación tal que $v_1(t_1^{\mathcal{M}_1}) = 1$

HI2) $Q(t_2) =$ Existe v_2 valuación tal que $v_2(t_2^{\mathcal{M}_1}) = 1$

TI) $Q(f_1(t_1, t_2)) =$ Existe v valuación tal que $v(f_1(t_1, t_2)^{\mathcal{M}_1}) = 1$

Demo)

Buscamos una v valuación que cumpla $v(f_1(t_1, t_2)^{\mathcal{M}_1}) = 1$

$$\begin{aligned}
&v(f_1(t_1, t_2)^{\mathcal{M}_1}) = 1 \\
&\Leftrightarrow \text{(Interpretación)} \\
&v(F_\vee(t_1^{\mathcal{M}_1}, t_2^{\mathcal{M}_1})) = 1 \\
&\Leftrightarrow \text{(Def. de } F_\vee\text{)} \\
&v((t_1^{\mathcal{M}_1} \vee t_2^{\mathcal{M}_1})) = 1 \\
&\Leftrightarrow \text{(Def. de valuación)} \\
&\text{máx}\{v(t_1^{\mathcal{M}_1}), v(t_2^{\mathcal{M}_1})\} = 1
\end{aligned}$$

Por (HI1), sabemos que existe v_1 tal que $v_1(t_1^{\mathcal{M}_1}) = 1$. Basta con tomar $v = v_1$ para que se cumpla que $v(f_1(t_1, t_2)^{\mathcal{M}_1}) = 1$.

Probamos que se cumplen las hipotesis del PIP sobre $\mathtt{TERM}_C$. Por lo tanto, podemos afirmar que para todo $t \in \mathtt{TERM}_C$ se cumple que $\mathcal{M}_1 \models \neg P_1(t)$.

II. La afirmación es falsa. Tomaremos como ejemplo $t = f_1(c_1, c_1)$.

Por un lado, podemos ver que $f_1(c_1, c_1) \in \mathtt{TERM}_C$ ya que se puede construir a partir de la aplicación de la regla (i) seguida de la aplicación de la regla (iii) de la definición inductiva de $\mathtt{TERM}_C$.

Luego, también podemos ver que $\mathtt{Cant}_f(f_1(c_1, c_1)) = 1 + 0 + 0 = 1 \geq 1$ por dos aplicaciones consecutivas de la definición de $\mathtt{Cant}_f$.

Sin embargo, podemos probar que se cumple que $f_1(c_1, c_1)^{\mathcal{M}_1} \notin \mathtt{TAUTO}$:

$$
\begin{aligned}
& f_1(c_1, c_1)^{\mathcal{M}_1} \notin \mathtt{TAUTO} \\
& \Leftrightarrow \text{(Interpretación)} \\
& F_\vee(c_1^{\mathcal{M}_1}, c_1^{\mathcal{M}_1}) \notin \mathtt{TAUTO} \\
& \Leftrightarrow \text{(Interpretación)} \\
& F_\vee(p_0, p_0) \notin \mathtt{TAUTO} \\
& \Leftrightarrow \text{(Def. de } F_\vee\text{)} \\
& (p_0 \vee p_0) \notin \mathtt{TAUTO} \\
& \Leftrightarrow \text{(Def. de } \mathtt{TAUTO} \text{ y } \mathtt{PROP}\text{)} \\
& \text{Existe } v \text{ valuación tal que } v((p_0 \vee p_0)) = 0
\end{aligned}
$$

Lo cual es cierto, ya que basta tomar cualquier valuación tal que $v(p_0) = 0$.

Por lo tanto, probamos que existe $t \in \mathtt{TERM}_C$ tal que $\mathtt{Cant}_f \geq 1$ y $t^{\mathcal{M}_1} \notin \mathtt{TAUTO}$, lo cual prueba que la afirmación es falsa.

Ejercicio 2 (25 puntos)

Construya las siguientes derivaciones. No es válida ningún tipo de consideración semántica.

a. $\neg(p \leftrightarrow q) \vdash (p \leftrightarrow \neg q)$

b. $P(c_1) \leftrightarrow (\forall x) f(x) =' g(x), P(c_2) \leftrightarrow (\exists y)(\neg f(y) =' g(y)) \vdash P(c_1) \rightarrow (\neg c_1 =' c_2)$

Bosquejo de solución

a. $\neg(p \leftrightarrow q) \vdash (p \leftrightarrow \neg q)$

$$
\dfrac{
\dfrac{\dfrac{\neg(p \leftrightarrow q) \qquad \dfrac{[q]^{(2)} \quad [p]^{(1)}}{p \leftrightarrow q}\, I\leftrightarrow}{\perp}\, E\neg}{\neg q}\, I^{(2)}\neg
\qquad
\dfrac{\dfrac{\neg(p \leftrightarrow q) \qquad \dfrac{\dfrac{\dfrac{[\neg p]^{(3)} \quad [p]^{(4)}}{\perp}\, E\neg}{q}\, E\perp \qquad \dfrac{\dfrac{[\neg q]^{(1)} \quad [q]^{(4)}}{\perp}\, E\neg}{p}\, E\perp}{p \leftrightarrow q}\, I^{(4)}\leftrightarrow}{\perp}\, E\neg}{p}\, RAA^{(3)}
}{p \leftrightarrow \neg q}\, I^{(1)}\leftrightarrow
$$

b. $P(c_1) \rightarrow (\forall x)(f(x) =' g(x)), P(c_2) \rightarrow (\exists y)(\neg f(y) =' g(y)) \vdash P(c_1) \rightarrow \neg c_1 =' c_2$

$$
\dfrac{
\dfrac{
P(c_2) \to (\exists y)(\neg f(y) =' g(y)) \qquad
\dfrac{[c_1 =' c_2]^2 \quad [P(c_1)]^1}{P(c_2)}\, RI4^*(*3)
}{(\exists y)(\neg f(y) =' g(y))}\, E\to
\qquad
\dfrac{
\neg f(y) =' g(y)]^3 \qquad
\dfrac{
\dfrac{P(c_1) \to (\forall x) f(x) =' g(x) \quad [P(c_1)]^1}{(\forall x) f(x) =' g(x)}\, E\to
}{f(y) =' g(y)}\, E\forall(*2)
}{\bot}\, E\neg
}{
\dfrac{
\dfrac{\bot}{(\neg c_1 =' c_2)}\, I\neg^{(2)}
}{P(c_1) \to (\neg c_1 =' c_2)}\, I\to^{(1)}
}\, E\exists^{(3)}(*1)
$$

(*1) No hay variables libres en $\bot$ ni en $\{P(c_1) \to (\forall x)f(x) =' g(x), P(c_1)\}$ que son las únicas hipótesis sin cancelar en la rama derecha de la regla.

(*2) y está libre para x en $f(x) =' g(x)$.

(*3) c_1 y c_2 están libres para z en $P(z)$.

Ejercicio 3 (25 puntos)

Se considera un lenguaje de primer orden con igualdad con tipo de similaridad $\langle 2; 1; 1 \rangle$. Se usarán los símboles P, f y c como símbolo de predicado, símbolo de función y constante respectivamente.

Sean las siguientes fórmulas:

- $\alpha := (\exists y)P(y, y)$
- $\beta := f(c) =' c$
- $\gamma := (\forall x)P(x, f(x))$

a. Indique cuáles de las siguientes afirmaciones se cumplen y cuáles no. Justifique su respuesta:

   I. $\alpha, \beta \models \gamma$
   II. $\beta, \gamma \models \alpha$

b. Se pide construir una estructura con ciertas condiciones. De no ser posible debe explicar por qué. Justifique su respuesta en todos los casos.

   I. Dar una estructura $\mathcal{M}_1$ tal que: $\mathcal{M}_1 \models \{\alpha, \neg\beta\}$
   II. Dar una estructura $\mathcal{M}_2$ tal que $\mathcal{M}_2 \models \{\gamma, \beta \wedge \neg\alpha\}$

Bosquejo de solución

a. I. $\alpha, \beta \models \gamma$

No se cumple. Para probarlo vamos a dar una estructura $\mathcal{M}$ que cumpla $\mathcal{M} \models \{\alpha, \beta\}$ y $\mathcal{M} \not\models \gamma$.

Sea $\mathcal{M} = \langle \{\bullet, \circ\}, \{(\circ, \circ)\}, \texttt{id}, \circ \rangle$ (`id` es la función *identidad*).

Probamos que $\mathcal{M}$ cumple con lo pedido:

$$
\begin{array}{l}
\mathcal{M} \models (\exists y)P(y, y) \\
\Leftrightarrow \text{ (2.4.5)} \\
(\bar{\exists} a \in \{\bullet, \circ\})\ \mathcal{M} \models P(\bar{a}, \bar{a}) \\
\Leftrightarrow \text{ (definición de } \models) \\
(\bar{\exists} a \in \{\bullet, \circ\})\ (\bar{a}, \bar{a}) \in \{(\circ, \circ)\}
\end{array}
$$

La última afirmación se cumple tomando $\circ$ como testigo. Por lo tango $\mathcal{M} \models \alpha$.

$$\begin{array}{l} \mathcal{M} \models f(c) =' c \\ \Leftrightarrow \text{ (definición de } \models) \\ f(c)^{\mathcal{M}} = c^{\mathcal{M}} \\ \Leftrightarrow \text{ (definición de } \mathcal{M}\ ) \\ \circ = \circ \end{array}$$

La última afirmación se cumple por lo que $\mathcal{M} \models \beta$.
Finalmente, probamos que $\mathcal{M} \not\models \gamma$:

$$\begin{array}{l} \mathcal{M} \not\models (\forall x)P(x, f(x)) \\ \Leftrightarrow \text{ (2.4.5 contrarecíproco)} \\ (\bar{\exists} a \in \{\bullet, \circ\})\ \mathcal{M} \not\models P(\bar{a}, f(\bar{a})) \\ \Leftrightarrow \text{ (definición de } \models \text{ y de } \mathcal{M}) \\ (\bar{\exists} a \in \{\bullet, \circ\})\ (a, a) \notin \{(\circ, \circ)\} \end{array}$$

La última afirmación se cumple si tomamos $\bullet$ como testigo. Por lo tanto $\mathcal{M} \not\models \gamma$.

II. $\beta, \gamma \models \alpha$

Sí se cumple.

Consideramos la siguiente derivación:

$$\dfrac{\dfrac{f(c) =' c \qquad \dfrac{(\forall x)P(x, f(x))}{P(c, f(c))}\, E_{\forall}\ (*^1)}{P(c, c)}\, RI4\ (*^2)}{(\exists y)P(y, y)}\, I_{\exists}\ (*^3)$$

$(*^1)$ c libre para x en $P(x, f(x)$

$(*^2)$ $f(c)$ y c libres para z en $P(c, z)$

$(*^3)$ c libre para y en $P(y, y)$

La derivación anterior prueba que $\beta, \gamma \vdash \alpha$. Aplicando correctitud, queda probado que $\beta, \gamma \models \alpha$.

b. Sea $\mathcal{M}_1 = \langle \{\bullet, \circ\}, \{(\circ, \circ)\}, F, \circ \rangle$
donde $F(x) = \bullet$ $(\bar{\forall} x \in \{\bullet, \circ\})$.

Probamos que $\mathcal{M}_1$ cumple con lo pedido:

$$\begin{array}{l} \mathcal{M}_1 \models (\exists y)P(y, y) \\ \Leftrightarrow \text{ (2.4.5)} \\ (\bar{\exists} a \in \{\bullet, \circ\})\ \mathcal{M}_1 \models P(\bar{a}, \bar{a}) \\ \Leftrightarrow \text{ (definición de } \models) \\ (\bar{\exists} a \in \{\bullet, \circ\})\ (a, a) \in \{(\circ, \circ)\} \end{array}$$

La última afirmación se cumple tomando $\circ$ como testigo. Por lo tango $\mathcal{M}_1 \models \alpha$.

$$\mathcal{M}_1 \models \neg f(c) =' c$$
$$\Leftrightarrow \text{(2.4.5)}$$
$$\mathcal{M}_1 \not\models f(c) =' c$$
$$\Leftrightarrow \text{(def. de } \models)$$
$$f(c)^{\mathcal{M}_1} \neq c^{\mathcal{M}_1}$$
$$\Leftrightarrow \text{(def. de } \mathcal{M}_1)$$
$$F(\circ) \neq \circ$$
$$\Leftrightarrow \text{(def. de } F)$$
$$\bullet \neq \circ$$

La última afirmación se cumple. Por lo tanto: $\mathcal{M}_1 \models \neg\beta$

c. No existe una estructura $\mathcal{M}_2$ tal que $\mathcal{M}_2 \models \{\gamma, \beta \wedge \neg\alpha\}$.

Lo probaremos construyendo una derivación $\gamma, \beta \wedge \neg\alpha \vdash \bot$:

$$\dfrac{\dfrac{f(c) =' c \wedge \neg(\exists y)P(y,y)}{\neg(\exists y)P(y,y)}\, E_\wedge \qquad \dfrac{\dfrac{\dfrac{f(c) =' c \wedge \neg(\exists y)P(y,y)}{f(c) =' c}\, E_\wedge \quad \dfrac{(\forall x)P(x,f(x))}{P(c,f(c))}\, E_\forall\ (*^1)}{P(c,c)}\, RI4\ (*^2)}{(\exists y)P(y,y)}\, I_\exists\ (*^3)}{\bot}\, E_\neg$$

$(*^1)$ c libre para x en $P(x, f(x))$

$(*^2)$ $f(c)$ y c libres para z en $P(c, z)$

$(*^3)$ c libre para y en $P(y, y)$

La derivación anterior prueba que el conjunto $\{\gamma, \beta \wedge \neg\alpha\}$ es inconsistente. Por lo tanto, no existen estructuras que lo modelen.

Ejercicio 4 (25 puntos)

Considere un lenguaje de primer orden con igualdad de tipo de similaridad $\langle 1; -; 1\rangle$ con símbolo de predicado P y símbolo de constante c.

Demuestre o dé un contraejemplo de las siguientes afirmaciones:

a. $(\bar{\forall}\varphi \in \texttt{SENT})\ Mod(\textsc{Cons}(\varphi)) = Mod(\varphi)$

b. No existe $\Delta \subseteq \texttt{SENT}$ tal que Δ es teoría y $\{\varphi : \vdash \varphi\} \subset \Delta \subset \textsc{Cons}((\forall x)P(x))$

c. Existe $\psi \in \texttt{SENT}$ que cumple simultáneamente las siguientes condiciones:

- $\psi \nvdash \bot$
- ψ no es equivalente a $\neg P(c)$
- $Mod(P(c)) \cap Mod(\psi) = \emptyset$

Bosquejo de solución

a. La afirmación es **verdadera**.

Sea $\varphi \in \texttt{SENT}$ arbitraria. Probamos primero la inclusión en un sentido:

$$\begin{array}{l} \text{(Por def. de Cons y regla de hip.)} \\ \{\varphi\} \subseteq \textsc{Cons}(\{\varphi\}) \\ \Rightarrow \text{(práctico 9)} \\ Mod(\textsc{Cons}(\varphi)) \subseteq Mod(\varphi) \end{array}$$

La inclusión en el otro sentido es la siguiente:

$$\begin{array}{l} Mod(\varphi) \subseteq Mod(\textsc{Cons}(\varphi)) \\ \Leftrightarrow \text{(def. } \subseteq) \\ (\forall \mathcal{M} \in Mod(\varphi))\ \mathcal{M} \in Mod(\textsc{Cons}(\varphi)) \end{array}$$

Sea $\mathcal{M} \in Mod(\varphi)$. Por def. de Mod, $\mathcal{M} \models \varphi$. Ahora tomando un $\psi \in \textsc{Cons}(\varphi)$ cualquiera, sabemos por def. de $\textsc{Cons}$ que $\varphi \vdash \psi$, o equivalentemente por el teorema de corrección, $\varphi \models \psi$. Por lo tanto, como $\mathcal{M} \models \varphi$ y $\varphi \models \psi$ tenemos que $\mathcal{M} \models \psi$. Finalmente, como esto sucede para cualquier $\psi \in \textsc{Cons}(\varphi)$, $\mathcal{M} \in Mod(\textsc{Cons}(\varphi))$.

b. La afirmación es **falsa**.
Sea $\Delta = \textsc{Cons}((\exists x)P(x))$, que es teoría por ser el $\textsc{Cons}$ de un conjunto. Mostramos ahora las inclusiones estrictas:

Primero, sabemos que los teoremas están en $\textsc{Cons}(\Gamma)$ para todo $\Gamma \subseteq \texttt{SENT}$. Además, dado que $\langle\{\circ\}, \emptyset, \emptyset\rangle \not\models (\exists x)P(x)$, $(\exists x)P(x)$ no es un teorema y por la regla de hipótesis $(\exists x)P(x) \in \textsc{Cons}(\{(\exists x)P(x)\})$. Probamos entonces que $\{\varphi : \vdash \varphi\} \subset \Delta$.

Por otro lado, la siguiente derivación muestra que $(\forall x)P(x) \vdash (\exists x)P(x)$:

$$\dfrac{\dfrac{(\forall x)P(x)}{P(x)}\ E\forall(*)}{(\exists x)P(x)}\ I\exists(*)$$

(*) x libre para x en $P(x)$

Por lo tanto, $\textsc{Cons}((\exists x)P(x)) \subseteq \textsc{Cons}((\forall x)P(x))$. Además, veamos que $(\forall x)P(x) \notin \textsc{Cons}((\exists x)P(x))$.

Sea $\mathcal{M}_c = \langle\{\circ, \bullet\}, \{\circ\}, \{\circ\}\rangle$. Como $\mathcal{M}_c \models (\exists x)P(x)$ entonces para cualquier $\psi \in \textsc{Cons}((\exists x)P(x))$, $\mathcal{M}_c \models \psi$.

Por contrarrecíproco, como $\mathcal{M}_c \not\models (\forall x)P(x)$ se cumple que $(\forall x)P(x) \notin \textsc{Cons}(\{(\exists x)P(x)\})$.
Sabemos entonces que $\textsc{Cons}((\exists x)P(x)) \subset \textsc{Cons}((\forall x)P(x))$.

c. La afirmación es **verdadera**.
Sea $\psi = (\forall x)\neg P(x)$.

En primer lugar, se cumple que $\psi \nvdash \bot$ ya que por ejemplo la estructura $\langle\{\circ, \bullet\}, \emptyset, \{\bullet\}\rangle$ modela ψ.

Por otra parte, la estructura $\langle\{\circ, \bullet\}, \{\circ\}, \{\bullet\}\rangle$ modela $\neg P(c)$ pero no modela a ψ, por lo que estas fórmulas no son equivalentes.

Finalmente, si existiera una estructura $\mathcal{M} \in Mod(P(c)) \cap Mod(\psi)$, esa estructura debería modelar tanto a $P(c)$ como a ψ, pero la siguiente derivación muestra que el conjunto $\{P(c), \psi\}$ es inconsistente:

$$\dfrac{\dfrac{(\forall x)\neg P(x)}{\neg P(c)}\ E\forall(*) \qquad P(c)}{\bot}\ E\neg$$

Por lo tanto, $Mod(P(c)) \cap Mod(\psi) = \emptyset$.