Examen de Lógica

26 de julio de 2022

Indicaciones generales

- Apagar los celulares.
- La duración del examen es de **tres (3)** horas.
- En esta prueba **no** se permite consultar material alguno.
- **Toda respuesta debe estar fundamentada.** Pueden usarse los resultados que aparecen en el texto del curso, en el teórico y en el práctico del mismo. En esos casos debe describirse con precisión el enunciado que se utiliza.
- Numerar todas las hojas e incluir en cada una su nombre y cédula de identidad, utilizar las hojas de un solo lado, escribir con lápiz, iniciar cada ejercicio en hoja nueva y poner en la primera hoja la cantidad de hojas entregadas.

Ejercicio 1(25 puntos)

Considere el conjunto $\mathbb{Z}$ de los números enteros y los símbolos $\oplus$ y $\otimes$.

a. Defina inductivamente el conjunto `Exp` de las expresiones aritméticas totalmente parentizadas usando enteros, el símbolo $\oplus$ como suma y el símbolo $\otimes$ como producto. Ej: $-12 \in \texttt{Exp}$ y $(-1 \oplus (3 \otimes 5)) \in \texttt{Exp}$ pero $(-1 \oplus 3 \otimes 5) \notin \texttt{Exp}$ y $-1 \oplus (3 \otimes 5) \notin \texttt{Exp}$.

b. Defina la función $\texttt{eval} : \texttt{Exp} \to \texttt{Exp}$ tal que devuelve el valor entero de la expresión de acuerdo a la definición anterior (el símbolo $\oplus$ como suma y el símbolo $\otimes$ como producto).

c. Considere la estructura $\mathcal{M} = \langle \texttt{Exp}, \mathbb{Z}, \texttt{eval} \rangle$ y un lenguaje de primer orden del tipo adecuado.

Demuestre que $\mathcal{M} \models (\forall x)P_1(f_1(x))$.

Ejercicio 2 (25 puntos)

En este ejercicio no se permite usar los teoremas de corrección y completitud.

a. Probar que, cualesquiera sean α, β y γ en `PROP` y $\Gamma \subseteq \texttt{PROP}$ se cumplen las siguientes propiedades.

   I. Si $\Gamma \vDash \alpha$ entonces $\Gamma, \neg\alpha \vDash \bot$
   II. Si $\alpha \wedge \beta \vDash \gamma$ entonces $\alpha \vDash \neg\beta \vee \gamma$

b. Se considera un lenguaje de primer orden con tipo de similaridad: $\langle 1; -; 0 \rangle$

Sea $\varphi := P(x)$ y $\psi = P(y)$ (x e y variables distintas)

   I. Probar que: $(\bar{\forall}\mathcal{M} : eta)(\mathcal{M} \models \varphi \Leftrightarrow \mathcal{M} \models \psi)$
   II. Probar que **no** se cumple que: $\varphi \ \texttt{eq} \ \psi$.

Ejercicio 3 (25 puntos)

Construya las siguientes derivaciones. No es válido ningún tipo de consideración semántica.

a. $\vdash \neg(p \to q) \leftrightarrow (p \wedge \neg q)$

b. $\neg(\forall x)(\exists y)f(y) =' x, (\forall x)(P(x) \leftrightarrow (\exists y)f(y) =' x) \vdash (\exists x)\neg P(x)$

Ejercicio 4 (25 puntos)

Considere la siguiente familia de fórmulas de PROP:

$$\varphi_i = p_{2i} \wedge \neg p_{2i+1} \quad (i \geq 0)$$

y el conjunto $\Gamma = \{\varphi_i / i \geq 1\}$.

Notar que $\varphi_0 = p_0 \wedge \neg p_1$ y que $\varphi_0 \notin \Gamma$

a. Determine si Γ es completo. En caso de no serlo, dar (si es posible) un conjunto Δ_1 tal que $\Gamma \subseteq \Delta_1$ y que Δ_1 sea completo.

   Nota: recuerde que un conjunto Γ es completo cuando es consistente y para todo $\alpha \in$ PROP, se cumple que $\Gamma \vdash \alpha$ o $\Gamma \vdash \neg\alpha$.

b. Determine si Γ es teoría. En caso de no serlo, dar (si es posible) un conjunto Δ_2 tal que $\Gamma \subseteq \Delta_2$ y que Δ_2 sea teoría y $\Delta_1 \nsubseteq \Delta_2$.

c. Determine si Γ es consistente maximal. En caso de no serlo, dar (si es posible) un conjunto Δ_3 tal que $\Gamma \subseteq \Delta_3$ y que Δ_3 sea consistente maximal.