Examen de Lógica

05 de Diciembre de 2022

Indicaciones generales

- Apagar los celulares.
- La duración del examen es de **tres (3)** horas.
- En esta prueba **no** se permite consultar material alguno.
- **Toda respuesta debe estar fundamentada.** Pueden usarse los resultados que aparecen en el texto del curso, en esos casos debe describirse con precisión el enunciado que se utiliza.
- Numerar todas las hojas e incluir en cada una su nombre y cédula de identidad, utilizar las hojas de un solo lado, escribir con lápiz, iniciar cada ejercicio en hoja nueva y poner en la primera hoja la cantidad de hojas entregadas.

Ejercicio 1(30 puntos)

Se considera un lenguaje de primer orden con igualdad con tipo de similaridad $\langle 2; 2; 2\rangle$ con símbolo de predicado P, símbolo de función f y constantes c_1 y c_2.

Sea la estructura $\mathcal{M} := \langle \mathbb{N}, <, +, 0, 1\rangle$.

Se consieran los conjuntos:

- $T_0 := \{t \in \texttt{TERM}_c \mid t^{\mathcal{M}} = 0\}$.
- $T_1 := \{t \in \texttt{TERM}_c \mid t^{\mathcal{M}} = 1\}$

a. Dar definiciones inductivas de los conjuntos T_0 y T_1. Sugerencia: puede utilizar elementos de T_0 en la definición de T_1.

b. Suponga sin demostrar que la definición de T_0 es correcta. Esto es:

$$(\bar{\forall} t \in \texttt{TERM}_C)(t \in T_0 \Leftrightarrow t^{\mathcal{M}} = 0) \qquad (\mathbb{A}_1)$$

Probar que la definición inductiva de T_1 dada en la parte a es correcta. Esto es:

I. $(\bar{\forall} t \in T_1)\ \ t^{\mathcal{M}} = 1$

II. $(\bar{\forall} t \in \texttt{TERM}_C)(t^{\mathcal{M}} = 1 \Rightarrow t \in T_1)$

c. Definir la función $H : \texttt{TERM}_C \to \texttt{TERM}_C$ tal que $H(t)$ es el resultado de cambiar en t, todas las ocurrencias de c_2 por c_1 sin cambiar el resto de los símbolos.

Ejemplo: $H(f(f(c_1, c_1), c_2)) = f(f(c_1, c_1), c_1)$.

d. Suponga sin demostrar que:

$$(\bar{\forall} t \in T_0)\ \ H(t) = t \qquad (\mathbb{A}_2)$$

Demostrar que: $(\bar{\forall} t \in T_1)\ \ \mathcal{M} \models P(H(t), t)$

Ejercicio 2 (24 puntos)

Considere un lenguaje de primer orden con tipo de similaridad $\langle 1; -; 1\rangle$, y las siguientes fórmulas:

$$\begin{array}{lcl} \varphi_1 & := & (\forall x)(P(x) \to \neg P(x)) \\ \varphi_2 & := & P(c) \\ \varphi_3 & := & ((\exists x)P(x)) \to P(c) \end{array}$$

Indique si las siguientes afirmaciones son verdaderas o falsas, justificando su respuesta.

a. $\varphi_1 \models \varphi_2$
b. $\varphi_1 \models \varphi_3$
c. $\varphi_3 \models \varphi_2$
d. Existe M del tipo adecuado tal que $M \models \{\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3\}$.

Ejercicio 3 (22 puntos)

Escriba derivaciones para

a. $\neg(\alpha \leftrightarrow \beta) \vdash \neg\alpha \vee \neg\beta$
b. $(\exists y)(\forall x)(f(x) =' y) \vdash (\exists z)(f(z) =' z)$

No se aceptarán consideraciones semánticas.

Ejercicio 4 (24 puntos)

Sea Δ el siguiente conjunto:

$$\Delta = \{(p_i \vee p_j) |\ i \in \mathbb{N}, j \in \mathbb{N}, i < j\}$$

a. Considere la siguiente valuación:

$$\begin{array}{rrcl} & v(p_0) & = & 0 \\ \bar{\forall} i > 0 & v(p_i) & = & 1 \end{array}$$

Determine si $v(\Delta) = 1$. Justifique su respuesta.

b. Indique si Δ es completo o no. Justifique.
c. Defina un conjunto Γ finito y consistente tal que: $(\Delta \cup \Gamma)$ sea inconsistente.
d. Defina un conjunto Σ que cumpla las siguientes condiciones, justificando su respuesta:
   - $\Sigma \cap \Delta = \emptyset$
   - $\Delta \subseteq \textsc{Cons}(\Sigma)$
   - $\textsc{Cons}(\Sigma)$ es consistente maximal.