Examen de Lógica

09 de Febrero de 2022

Indicaciones generales

- La duración de esta parte del examen es de **una hora y media**.
- En esta prueba **no** se permite consultar material alguno.
- Puntaje: **100** puntos.
- **Toda respuesta debe estar fundamentada.** Pueden usarse los resultados que aparecen en el texto del curso, en esos casos debe describirse con precisión el enunciado que se utiliza.
- Incluir en la primera hoja de las soluciones una foto de la CI.

Ejercicio 1(25 puntos)

Sean los siguientes subconjuntos de $\texttt{PROP}$:

- $\texttt{TAUTO} = \{\varphi \in \texttt{PROP} / \varphi$ es una tautología$\}$
- $\texttt{CONTR} = \{\varphi \in \texttt{PROP} / \varphi$ es una contradicción$\}$

Sea L un lenguaje de primer orden tal que $\mathcal{M}_1 = \langle \texttt{PROP}, \texttt{CONTR}, F_\vee, p_0, \neg p_0 \rangle$ es una estructura adecuada para ese lenguaje, donde $F_\vee$ esta definido de la siguiente forma: $F_\vee(\varphi, \beta) = (\varphi \vee \beta)$

a. Determine el tipo de similaridad de la estructura $\mathcal{M}_1$. Justifique su respuesta.
b. Escriba la definición del conjunto $\texttt{TERM}_C$ de los términos cerrados (sin constantes extendidas) para el lenguaje L.
c. Defina una función recursiva $\texttt{Cant}_f$ tal que cuente la cantidad de símbolos de función en un elemento de $\texttt{TERM}_C$.
d. Demuestre o refute las siguientes afirmaciones:
   I. Para todo $t \in \texttt{TERM}_C$ se cumple que $\mathcal{M}_1 \models \neg P_1(t)$.
   II. Para todo $t \in \texttt{TERM}_C$ se cumple que si $\texttt{Cant}_f(t) \geq 1$ entonces $t^{\mathcal{M}_1} \in \texttt{TAUTO}$.

Ejercicio 2 (25 puntos)

Construya las siguientes derivaciones. No es válida ningún tipo de consideración semántica.

a. $\neg(p \leftrightarrow q) \vdash (p \leftrightarrow \neg q)$
b. $P(c_1) \leftrightarrow (\forall x) f(x) =' g(x), P(c_2) \leftrightarrow (\exists y)(\neg f(y) =' g(y)) \vdash P(c_1) \to (\neg c_1 =' c_2)$

Ejercicio 3 (25 puntos)

Se considera un lenguaje de primer orden con igualdad con tipo de similaridad $\langle 2; 1; 1 \rangle$. Se usarán los símboles P, f y c como símbolo de predicado, símbolo de función y constante respectivamente.

Sean las siguientes fórmulas:

- $\alpha := (\exists y) P(y, y)$
- $\beta := f(c) =' c$

- $\gamma := (\forall x)P(x, f(x))$

a. Indique cuáles de las siguientes afirmaciones se cumplen y cuáles no. Justifique su respuesta:

   I. $\alpha, \beta \models \gamma$
   II. $\beta, \gamma \models \alpha$

b. Se pide construir una estructura con ciertas condiciones. De no ser posible debe explicar por qué. Justifique su respuesta en todos los casos.

   I. Dar una estructura $\mathcal{M}_1$ tal que: $\mathcal{M}_1 \models \{\alpha, \neg\beta\}$
   II. Dar una estructura $\mathcal{M}_2$ tal que $\mathcal{M}_2 \models \{\gamma, \beta \wedge \neg\alpha\}$

Ejercicio 4 (25 puntos)

Considere un lenguaje de primer orden con igualdad de tipo de similaridad $\langle 1; -; 1\rangle$ con símbolo de predicado P y símbolo de constante c.

Demuestre o dé un contraejemplo de las siguientes afirmaciones:

a. $(\bar{\forall}\varphi \in \texttt{SENT})\ \mathit{Mod}(\textsc{Cons}(\varphi)) = \mathit{Mod}(\varphi)$
b. No existe $\Delta \subseteq \texttt{SENT}$ tal que Δ es teoría y $\{\varphi : \vdash \varphi\} \subset \Delta \subset \textsc{Cons}((\forall x)P(x))$
c. Existe $\psi \in \texttt{SENT}$ que cumple simultáneamente las siguientes condiciones:

   - $\psi \nvdash \bot$
   - ψ no es equivalente a $\neg P(c)$
   - $\mathit{Mod}(P(c)) \cap \mathit{Mod}(\psi) = \emptyset$