# Examen (Parte A) de Lógica

**04 de Agosto de 2021**

**Indicaciones generales**

- La duración del examen es de **una hora y media**.
- En esta prueba **no** se permite consultar material alguno.
- Puntaje: **50** puntos.
- **Toda respuesta debe estar fundamentada.** Pueden usarse los resultados que aparecen en el texto del curso, en esos casos debe describirse con precisión el enunciado que se utiliza.
- Incluir en la primera hoja de las soluciones una foto de la CI

## Ejercicio 1(25 puntos)

Considere el conjunto $L \subset PROP$ con las siguientes caracteristicas

- las letras proposicionales aparecen ellas y su negación
- Los únicos conectivos que aparecen son $\{\wedge, \vee, \neg\}$
- las negaciones aparecen solo sobre las letras proposicionales

A modo de ejemplo, estos elementos pertenecen a $L$:

- $p_1$
- $(\neg p_2)$
- $(p_0 \wedge (\neg p_3))$
- $(p_0 \vee (\neg p_3))$

A modo de ejemplo, estos elementos **no** pertenecen a $L$:

- $(\neg(p_0 \vee p_1))$.
- $(\neg(\neg p_2))$

a. Defina el conjunto $L$ de forma inductiva.

b. Defina la función $F : L \to L$ que transforma toda letra proposicional en su negación y toda negacion de una letra proposicional en la letra proposicional, también transforma todo conectivo $\wedge$ en $\vee$. Y el conectivo $\vee$ permanece sin modificar.
Ejemplo: $F(((p_0 \wedge (\neg p_3)) \vee p_1)) = (((\neg p_0) \vee p_3) \vee (\neg p_1))$

c. Demuestre la siguiente afirmación: para todo elemento $\alpha \in L$, $(\models (F(\alpha) \vee \alpha))$

# Bosquejo de solución

a. El conjunto $L$ lo definimos inductivamente con las siguientes reglas:

- I $p_i \in L$
- II $(\neg p_i) \in L$
- III si $\alpha$ y $\beta \in L$ entonces $(\alpha \vee \beta) \in L$
- IV si $\alpha$ y $\beta \in L$ entonces $(\alpha \wedge \beta) \in L$

b. La función $F$ la definimos siguiendo el esquema de recursión primitiva de la siguiente manera:

- I $F(p_i) = (\neg p_i)$
- II $F((\neg p_i)) = p_i$
- III $F((\alpha \vee \beta)) = (F(\alpha) \vee F(\beta))$
- IV $F((\alpha \wedge \beta)) = (F(\alpha) \vee F(\beta))$

c. La afirmación es **verdadera**. Haremos la prueba utilizando el PIP para $L$
Identificamos la propiedad a utilizar, $\mathcal{P}(\alpha) :=\models (F(\alpha) \vee \alpha)$

**Paso Base 1**

**T)** $\mathcal{P}(p_i) : \ \models (F(p_i) \vee p_i)$

**Demo.**

$\models (F(p_i) \vee p_i)$
$\Leftrightarrow$ (def $F$)
$\models ((\neg p_i) \vee p_i)$
(Se cumple trivialmente)

**Paso Base 2**

**T)** $\mathcal{P}((\neg p_i)) : \ \models (F((\neg p_i)) \vee (\neg p_i))$

**Demo.**

$\models (F((\neg p_i)) \vee (\neg p_i))$
$\Leftrightarrow$ (def $F$)
$\models (p_i \vee (\neg p_i))$
(Se cumple trivialmente)

**Paso Inductivo 1**

**HI1)** $\mathcal{P}(\alpha) : \ \models (F(\alpha) \vee \alpha)$
**HI2)** $\mathcal{P}(\beta) : \ \models (F(\beta) \vee \beta)$
**TI)** $\mathcal{P}((\alpha \vee \beta)) : \ \models (F((\alpha \vee \beta)) \vee (\alpha \vee \beta)$

**Demo.**

(HI1))
$\models (F(\alpha) \vee \alpha)$
$\Leftrightarrow$ (def. de $\models$)
$(\bar{\forall} v : valuacion)(v((F(\alpha) \vee \alpha)) = 1)$
**(A)**

(HI12))
$\models (F(\beta) \vee \beta)$
$\Leftrightarrow$ (def. de $\models$)
$(\bar{\forall} v : valuacion)(v((F(\beta) \vee \beta)) = 1)$
**(B)**

$\models (F((\alpha \vee \beta)) \vee (\alpha \vee \beta)$
$\Leftrightarrow$ (Def $F$)
$\models ((F(\alpha) \vee F(\beta)) \vee (\alpha \vee \beta))$
$\Leftrightarrow$ (conmutatividad)
$\models ((F(\alpha) \vee \alpha) \vee (F(\beta) \vee \beta)))$
$\Leftrightarrow$ (def. de $\models$)
$(\bar{\forall} v : valuacion)(v(((F(\alpha) \vee \alpha) \vee (F(\beta) \vee \beta)))) = 1)$
$\Leftrightarrow$ (def. de $v$)
$(\bar{\forall} v : valuacion)\text{máx}\,\{(v((F(\alpha) \vee \alpha)), v((F(\beta) \vee \beta))\} = 1$
$\Rightarrow$ (por (A) y (B))
$(\bar{\forall} v : valuacion)\text{máx}\,\{1, 1\} = 1$
(Se cumple.)

**Paso Inductivo 2**

**HI1)** $\mathcal{P}(\alpha) : \ \models (F(\alpha) \vee \alpha)$
**HI2)** $\mathcal{P}(\beta) : \ \models (F(\beta) \vee \beta)$
**TI)** $\mathcal{P}((\alpha \vee \beta)) : \ \models (F((\alpha \wedge \beta)) \vee (\alpha \wedge \beta)$
**Demo.**

$\models (F((\alpha \wedge \beta)) \vee (\alpha \wedge \beta))$
$\Leftrightarrow$ (Distributiva)
$\models (F((\alpha \wedge \beta)) \vee \alpha) \wedge (F((\alpha \wedge \beta)) \vee \beta)$
$\Leftrightarrow$ (Def $F$)
$\models (F(\alpha) \vee F(\beta) \vee \alpha) \wedge (F(\alpha) \vee F(\beta) \vee \beta)$
$\Leftrightarrow$ (Conmutatividad de $\vee$)
$\models ((F(\alpha) \vee \alpha) \vee F(\beta)) \wedge ((F(\beta) \vee \beta) \vee F(\alpha))$
$\Leftrightarrow$ (def de $\models$)
$(\bar{\forall} v : valuacion)min\{v((F(\alpha) \vee \alpha) \vee F(\beta))), v((F(\beta) \vee \beta) \vee F(\alpha))\} = 1$
$\Leftrightarrow$ (def de valuación)
$(\bar{\forall} v : valuacion)(v((F(\alpha) \vee \alpha) \vee F(\beta)) = 1$ y $v((F(\beta) \vee \beta) \vee F(\alpha)) = 1)$
$\Leftrightarrow$ (distributiva del paratodo)
$(\bar{\forall} v : valuacion)(v((F(\alpha) \vee \alpha) \vee F(\beta)) = 1)$ y $(\bar{\forall} v : valuacion)(v((F(\beta) \vee \beta) \vee F(\alpha)) = 1)$
$\Leftrightarrow$ (def de valuación)
$(\bar{\forall} v : valuacion)max\{v((F(\alpha) \vee \alpha), v(F(\beta))\} = 1$ y
$(\bar{\forall} v : valuacion)max\{v((F(\beta) \vee \beta), v(F(\alpha))\} = 1$
$\Leftarrow$ (por hipotesís inductivas y lo dem. A y B del paso inductivo anterior, def. de valuación y máx)
$(\bar{\forall} v : valuacion)max\,\{1, v(F(\beta))\} = 1$ y $(\bar{\forall} v : valuacion)max\,\{1, v(F(\alpha))\} = 1$

Entonces por el PIP para $L$ podemos afirmar que se cumple para todo elemento de $L$

$$\text{para todo elemento } \alpha \in L \ \models (F(\alpha) \vee \alpha)$$

# Ejercicio 2 (25 puntos)

Se considera el tipo de similaridad $\langle 1, 1; 1; 1 \rangle$. Con los símbolos de predicado $P$ y $Q$, el símbolo de función $f$ y la constante $c$.

Consideramos $\Gamma \subseteq \texttt{FORM}$. Llamaremos $Mod_{\mathbb{N}}(\Gamma)$ al conjunto de todas las estructuras $\mathcal{M}$ del tipo adecuado. tales que

- $\mathcal{M} \models \Gamma$

- $\mathcal{M} = \langle \mathbb{N}, \{2,3\}, B, s, 0\rangle$ donde:
  - $\mathbb{N}$ es el conjunto de los números naturales.
  - $s$ es la función *sucesor*: $s : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ tal que $s(n) = n + 1$.

Observar que dos estructuras distintas de $Mod_{\mathbb{N}}(\Gamma)$ van a diferir únicamente en el conjunto $B$ que interpreta al símbolo de predicado $Q$.

Sea $\varphi = (\forall x)(\neg P(x) \to Q(x))$.

a. Hallar $k$, cantidad de estructuras del conjunto $Mod_{\mathbb{N}}(\{\varphi\})$. Justifique su respuesta.
b. Determinar si existe $\alpha \in \texttt{FORM}$ tal que la cantidad de elementos de $Mod_{\mathbb{N}}(\{\varphi, \alpha\})$ es 2. Justifique su respuesta.
c. Determine la cantidad de elementos que tiene el conjunto

$$Mod_{\mathbb{N}}(\{\varphi, (\forall z)((Q(f(c)) \vee Q(z)) \to Q(f(z)))\})$$

Justifique su respuesta.

# Bosquejo de solución

a. Considero una estructura $\mathcal{M} \in Mod_{\mathbb{N}}(\{\varphi\})$. Sabemos que $\mathcal{M} \models \varphi$

$$\begin{array}{l}
\mathcal{M} \models (\forall x)(\neg P(x) \to Q(x)) \\
\Leftrightarrow \text{(2.4.5)} \\
(\bar{\forall} k \in \mathbb{N}) \ : \ \mathcal{M} \models (\neg P(x) \to Q(x))[\bar{k}/x] \\
\Leftrightarrow \text{(sustitución)} \\
(\bar{\forall} k \in \mathbb{N}) \ : \ \mathcal{M} \models (\neg P(\bar{k}) \to Q(\bar{k})) \\
\Leftrightarrow \text{(2.4.5 (varios pasos))} \\
(\bar{\forall} k \in \mathbb{N}) \ : \ \mathcal{M} \not\models P(\bar{k}) \Rightarrow \mathcal{M} \models Q(\bar{k})) \\
\Leftrightarrow \text{(definición de } \models) \\
(\bar{\forall} k \in \mathbb{N}) \ : \ v^{\mathcal{M}}(P(\bar{k})) = 0 \Rightarrow v^{\mathcal{M}}(Q(\bar{k}) = 1) \\
\Leftrightarrow \text{(definición de } v \text{ y } \mathcal{M}) \\
(\bar{\forall} k \in \mathbb{N}) \ : \ k \notin \{2,3\} \Rightarrow k \in B
\end{array}$$

De lo anterior concluimos que el conjunto $B$ debe contener todos los naturales distintos de 2 y 3. Esto es: $\mathbb{N} - \{2,3\} \subseteq B$.

Por lo tanto $B$ debe ser necesariamente uno de los siguientes conjuntos:

(I) $\mathbb{N}$
(II) $\mathbb{N} - \{2\}$
(III) $\mathbb{N} - \{3\}$
(IV) $\mathbb{N} - \{2,3\}$

La cantidad de estructuras en $Mod_{\mathbb{N}}(\varphi)$ es 4.

b. Definimos $\alpha := Q(f(f(c)))$.

$$\begin{array}{l} \mathcal{M} \models \alpha \\ \Leftrightarrow \text{ (definición de } v^{\mathcal{M}}) \\ f(f(c))^{\mathcal{M}} \in Q^{\mathcal{M}} \\ \Leftrightarrow \text{ (Definición de } \mathcal{M}) \\ 2 \in Q^{\mathcal{M}} \end{array}$$

Si $\mathcal{M} \in Mod_{\mathbb{N}}(\{\varphi, \alpha\})$ entonces $\mathcal{M}$ es de la forma $\langle \mathbb{N}, \{2,3\}, B, s, 0\rangle$ donde $B$ debe cumplir:

- $\mathbb{N} - \{2,3\} \subseteq B$ (porque $\mathcal{M} \models \varphi$)
- $2 \in B$ (porque $\mathcal{M} \models \alpha$)

De los cuatro conjuntos vistos en la parte anterior debemos considerar los que contengan el 2. Por lo tanto hay dos posibilidades para $B$.

I $\mathbb{N}$

II $\mathbb{N} - \{3\}$

Por lo tanto $Mod_{\mathbb{N}}(\{\varphi, \alpha\})$ tiene dos elementos.

c. Consideramos una estructra $\mathcal{M} \in Mod_{\mathbb{N}}(\{\varphi, (\forall z)((Q(f(c)) \vee Q(z)) \to Q(f(z))))\}$

$$\begin{array}{l} \mathcal{M} \models (\forall z)((Q(f(c)) \vee Q(z)) \to Q(f(z))) \\ \Leftrightarrow \text{ (2.4.5 (varios pasos))} \\ (\bar{\forall} k \in \mathbb{N}) \ : \ \mathcal{M} \models Q(f(c)) \text{ o } \mathcal{M} \models Q(\bar{k}) \Rightarrow \mathcal{M} \models Q(f(\bar{k})) \\ \Leftrightarrow \text{ (def. de } \models \text{ y } v^{\mathcal{M}}) \\ (\bar{\forall} k \in \mathbb{N}) \ : \ 1 \in B \text{ o } k \in B \Rightarrow (k+1) \in B \end{array}$$

Donde llamamos $B$ al conjunto que interpreta el predicado $Q$.

Si además sabemos que $\mathcal{M} \models \varphi$, por la parte a) tenemos que $B \supseteq N - \{2,3\}$ y por lo tanto $1 \in B$.

Esto significa que el antecedente de la última implicancia es verdadero cualquiera sea $k$. Por lo tanto el consecuente debe ser verdadero para todo $k$.

Se concluye entonces que el conjunto $B$ debe cumplir:

$$(\bar{\forall} k \in \mathbb{N}) \ (k+1) \in B$$

Esta condición junto con $B \supseteq N - \{2,3\}$ nos permite concluir que $B = \mathbb{N}$.

Luego el conjunto $Mod_{\mathbb{N}}(\{\varphi, (\forall z)((Q(f(c)) \vee Q(z)) \to Q(f(z)))\})$ tiene un único elemento.