Examen de Lógica

10 de Febrero de 2021

Indicaciones generales

- Apagar los celulares.
- La duración del examen es de **tres (3)** horas.
- En esta prueba **no** se permite consultar material alguno.
- **Toda respuesta debe estar fundamentada.** Pueden usarse los resultados que aparecen en el texto del curso, en esos casos debe describirse con precisión el enunciado que se utiliza.

Ejercicio 1(25 puntos)

Es posible dar una representación unaria (con un solo símbolo, por ejemplo i) del conjunto los naturales sin el 0 usando tiras con un solo símbolo en donde el número es representado por el largo de la tira. Ej: i representa al 1, ii representa al 2, iii representa al 3, etc.

a. Defina el lenguaje $\mathcal{L}$ de todas las tiras posibles de símbolos del conjunto $\{i\}$ que tienen al menos un símbolo.

b. Defina la función $v : \mathcal{L} \to \mathbb{N}$ tal que devuelve la cantidad de i que tiene la tira.

c. Defina la función $Prod : \mathcal{L} \times \mathcal{L} \to \mathcal{L}$ tal que $v(Prod(\alpha, \beta)) = v(\alpha) * v(\beta)$.

d. Asumiendo que se cumple que $v(\alpha\beta) = v(\alpha) + v(\beta)$ pruebe por inducción que su definición de $Prod$ es correcta, o sea, pruebe que para cualquier α y β, se cumple que $v(Prod(\alpha, \beta)) = v(\alpha) * v(\beta)$.

Bosquejo de solución

a.

I. $i \in \mathcal{L}$

II. $i\omega \in \mathcal{L}$ si $\omega \in \mathcal{L}$

b.

$v : \mathcal{L} \to \mathbb{N}$

$$\begin{aligned} v(i) &= 1 \\ v(i\omega) &= 1 + v(\omega) \end{aligned}$$

c.

$Prod : \mathcal{L} \times \mathcal{L} \to \mathcal{L}$

$$\begin{aligned} Prod(i, \beta) &= \beta \\ Prod(i\omega, \beta) &= \beta Prod(\omega, \beta) \end{aligned}$$

d. La solución es el siguiente teorema:

H) $v(\alpha\beta) = v(\alpha) + v(\beta)$

T) $(\bar{\forall}\beta \in \mathcal{L})(\bar{\forall}\alpha \in \mathcal{L})(v(Prod(\alpha, \beta)) = v(\alpha) * v(\beta)))$

Dem.

Considere β, una tira cualquiera de $\mathcal{L}$. Hecho esto, lo que hay que demostrar es

$$(\bar{\forall}\alpha \in \mathcal{L})(v(Prod(\alpha,\beta)) = v(\alpha) * v(\beta)))$$

Observar que la tesis está planteada como una inducción en sólo el primer parámetro. Eso es así por la definición de $Prod$, que sólo hace la recursión en el primer parámetro. De esta forma, la indución a realizar es la siguiente:

PB:

T) $v(Prod(i,\beta)) = v(i) * v(\beta)$

Dem.

Por definición de v,

$$v(i) = 1$$

y por definición de $Prod$,

$$Prod(i,\beta) = \beta$$

De esta forma, lo que hay que probar es que:

$$v(\beta) = 1 * v(\beta)$$

lo cual se cumple por defininción de $*$.

■

PI:

H) $v(Prod(\alpha,\beta)) = v(\alpha) * v(\beta)$

T) $v(Prod(i\alpha,\beta)) = v(i\alpha) * v(\beta)$

Dem.

Por definición de $Prod$ se cumple que,

$$Prod(i\alpha,\beta) = \beta Prod(\alpha)$$

Por lo anterior se cumple que:

$$v(Prod(i\alpha,\beta)) = v(\beta Prod(\alpha,\beta))$$

Por la hipótesis externa (o sea: $v(\alpha\beta) = v(\alpha) + v(\beta)$), instanciando α y β de la forma correcta, se cumple que [1]:

$$v(\beta Prod(\alpha,\beta)) = v(\beta) + v(Prod(\alpha,\beta))$$

Por la hipotesis de inducción:

$$v(\beta) + v((Prod(\alpha,\beta)) = v(\beta) + v(\alpha) * v(\beta)$$

Sacando factor común obtenemos:

$$(1 + v(\alpha)) * v(\beta)$$

Aplicando la defininción de v, obtenemos:

$$v(i\alpha) * v(\beta)$$

Si se hace la transitividad de todas las igualdades se obtiene nuestra tesis:

$$v(Prod(i\alpha,\beta)) = v(i\alpha) * v(\beta)$$

[1] Este paso es equivalente a haber clausurado nuestra hipótesis externa y luego, eliminar los $\bar{\forall}$ adecuadamente.

■

En función de las demostraciones realizadas, aplicando el Principio de Inducción Primitiva para $\mathcal{L}$, se cumple que:

$$(\bar{\forall}\alpha \in \mathcal{L})(v(Prod(\alpha, \beta)) = v(\alpha) * v(\beta)))$$

Además como β es arbitraria, se cumple nuestra tesis:

$$(\bar{\forall}\beta \in \mathcal{L})(\bar{\forall}\alpha \in \mathcal{L})(v(Prod(\alpha, \beta)) = v(\alpha) * v(\beta)))$$

■

Ejercicio 2 (25 puntos)

Considere el tipo de similaridad $\langle 1; 1; 1\rangle$. Indique cuáles de las siguientes afirmaciones se cumplen y cuáles no. Justificar en cada caso.

a. $(\bar{\forall}\Gamma \subseteq \texttt{SENT})(\bar{\forall}\sigma \in \texttt{SENT})(\Gamma \not\models \sigma \Rightarrow \Gamma \models \neg\sigma)$.
b. $(\bar{\forall}\Gamma \subseteq \texttt{SENT})(\bar{\forall}\sigma \in \texttt{SENT})(\Gamma \models \neg\sigma \Rightarrow \Gamma \not\models \sigma)$.
c. $(\bar{\forall}\Gamma \subseteq \texttt{SENT})(\bar{\forall}\sigma_1 \in \texttt{SENT})(\bar{\forall}\sigma_2 \in \texttt{SENT})(\Gamma \not\models \sigma_1 \vee \sigma_2 \Rightarrow \Gamma \not\models \sigma_1 \text{ o } \Gamma \not\models \sigma_2)$.
d. $(\bar{\forall}\Gamma \subseteq \texttt{SENT})(\bar{\forall}\sigma_1 \in \texttt{SENT})(\bar{\forall}\sigma_2 \in \texttt{SENT})(\Gamma \not\models \sigma_1 \text{ o } \Gamma \not\models \sigma_2 \Rightarrow \Gamma \not\models \sigma_1 \vee \sigma_2)$.

Bosquejo de solución

Usaremos los símbolos P, f y a como los símbolos del alfabeto correspondiente al tipo $\langle 1; 1; 1\rangle$.

a. Es **falso**.

Daremos Γ y σ tales que: $\Gamma \not\models \sigma$ y $\Gamma \not\models \neg\sigma$.

Sea $\Gamma \equiv \emptyset$ y $\sigma \equiv P(a)$.

Probaremos que $\Gamma \not\models \sigma$, dando una estructura $\mathcal{M}_1$ tal que $\mathcal{M}_1 \models \Gamma$ y $\mathcal{M}_1 \not\models P(a)$.

Definimos $\mathcal{M}_1 \equiv \langle\{\circ\}, \emptyset, F, \circ\rangle$ donde F es una función cualquiera del tipo adecuado.

Como Γ es vacío: $\mathcal{M}_1 \models \Gamma$ por vacuidad.

Probamos ahora que $\mathcal{M}_1 \not\models P(a)$:

$$\begin{array}{l} \mathcal{M}_1 \models P(a) \\ \Leftrightarrow \text{ (def. de } \models) \\ v^{\mathcal{M}_1}(P(a)) = 1 \\ \Leftrightarrow \text{ (def. de } v^{\mathcal{M}_1}) \\ a^{\mathcal{M}_1} \in P^{\mathcal{M}_1} \\ \Leftrightarrow \text{ (def. de } \mathcal{M}_1) \\ \circ \in \emptyset \quad \text{(falso)} \end{array}$$

Probaremos ahora que $\Gamma \not\models \neg\sigma$ dando una estructura $\mathcal{M}_2$ tal que $\mathcal{M}_2 \models \Gamma$ y $\mathcal{M}_2 \not\models \neg\sigma$.

$\mathcal{M}_2 \equiv \langle\{\circ\}, \{\circ\}, F, \circ\rangle$.

Como ya vimos: $\mathcal{M}2 \models \Gamma$ (por vacuidad). Por otro lado:

$$\begin{array}{l} \mathcal{M}_2 \models \neg P(a) \\ \Leftrightarrow \text{(def. de } \models) \\ v^{\mathcal{M}_2}(\neg P(a)) = 1 \\ \Leftrightarrow \text{(def. de } v^{(-)}) \\ v^{\mathcal{M}_2}(P(a)) = 0 \\ \Leftrightarrow \text{(def. de } v^{(-)}) \\ a^{\mathcal{M}_2} \notin P^{\mathcal{M}_2} \\ \Leftrightarrow \text{(def. de } \mathcal{M}_2) \\ \circ \notin \{\circ\} \quad \text{(falso)} \end{array}$$

b. Es **falso**.

Alcanza con considerar $\Gamma \equiv \{\bot\}$ y σ cualquiera. Por ser Γ inconsistente, toda fórmula es consecuencia lógica de Γ. En particular: $\Gamma \models \neg\sigma$ y $\Gamma \models \sigma$ lo que hace que no se cumpla la implicancia dada para estos Γ y σ.

c. Es **verdadero**.

Si $\Gamma \nvDash \sigma_1 \vee \sigma_2$, existe una estructura $\mathcal{M}$ tal que $\mathcal{M} \models \Gamma$ y $\mathcal{M} \not\models \sigma_1 \vee \sigma_2$.

Aplicando 2.4.5 (contrarecíproco) concluimos que:

$$\mathcal{M} \not\models \sigma_1 \text{ y } \mathcal{M} \not\models \sigma_2$$

Se ha probado entonces, a partir de la hipótesis $\Gamma \nvDash \sigma_1 \vee \sigma_2$, que existe una estructura $\mathcal{M}$ tal que $\mathcal{M} \models \Gamma$ y $\mathcal{M} \not\models \sigma_1$ y $\mathcal{M} \not\models \sigma_2$.

Entonces, por definición de consecuencia lógica: $\Gamma \not\models \sigma_1$ y $\Gamma \not\models \sigma_2$.

Puesto que la disyunción es *inclusiva*, obtenemos lo que queríamos probar:

$$\Gamma \not\models \sigma_1 \text{ o } \Gamma \not\models \sigma_2$$

d. Es **falso**.

Consideramos: Γ cualquier conjunto consistente (por ejemplo el vacío), $\sigma_1 \equiv \bot$ y $\sigma_2 \equiv \neg\bot$.

Vemos que se cumple el antecedente de la implicancia puesto $\Gamma \nvdash \sigma_1$ por ser Γ consistente. Por completitud: $\Gamma \not\models \sigma_1$. Por lo tanto se cumple la hipótesis disyuntiva.

Por otro lado vemos que no se cumple la tesis $\Gamma \not\models \sigma_1 \vee \sigma_2$ ya que:

$$\begin{array}{l} \Gamma \models \sigma_1 \vee \sigma_2 \\ \Leftrightarrow \text{(def. de } \mathit{Gamma}, \sigma_1 \text{ y } \sigma_2) \\ \Gamma \models \bot \vee \neg\bot \\ \Leftrightarrow \text{(def. consecuencia lógica)} \\ (\bar{\forall}\mathcal{M} \text{ e.t.a. }) (\mathcal{M} \models \Gamma \Rightarrow \mathcal{M} \models \bot \vee \neg\bot) \end{array}$$

Esta última expresión se cumple siempre puesto que la conclusión de la implicancia es verdadera para todo $\mathcal{M}$ ya que $\bot \vee \neg\bot$ es lógicamente válida.

Ejercicio 3 (25 puntos)

Construir derivaciones para probar los siguientes juicios. En ningún caso son válidas consideraciones semánticas.

a. $\vdash \alpha \land \beta \leftrightarrow \neg(\alpha \to \neg\beta)$
b. $(\forall x)(\forall y)(P(x,y) \leftrightarrow f(x) =' y) \vdash (\forall x)(\forall z)(f(f(x)) =' z \to (\exists y)(P(x,y) \land P(y,z)))$

Bosquejo de solución

a. $\vdash \alpha \land \beta \leftrightarrow \neg(\alpha \to \neg\beta)$

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\alpha \to \neg\beta \quad \dfrac{[\alpha\land\beta]^1}{\alpha}\,E\land}{\neg\beta}\,E\to \quad \dfrac{[\alpha\land\beta]^1}{\beta}\,E\land}{\bot}\,E\neg}{\neg(\alpha\to\neg\beta)}\,I\neg(2) \qquad \dfrac{\dfrac{\dfrac{[\neg(\alpha\to\neg\beta)]^1 \quad \dfrac{\dfrac{\dfrac{[\neg\alpha]^3 \quad [\alpha]^5}{\bot}\,E\neg}{[\neg\beta]}\,E\bot}{\alpha\to\neg\beta}\,I\to(5)}{\bot}\,E\neg}{\alpha}\,RAA(3) \quad \dfrac{\dfrac{[\neg(\alpha\to\neg\beta)]^1 \quad \dfrac{[\neg\beta]^4}{\alpha\to\neg\beta}\,I\to}{\bot}\,E\neg}{\beta}\,RAA(4)}{\alpha\land\beta}\,I\land}{\alpha\land\beta \leftrightarrow \neg(\alpha\to\neg\beta)}\,I\leftrightarrow(1)$$

b. $(\forall x)(\forall y)(P(x,y) \leftrightarrow f(x) =' y) \vdash (\forall x)(\forall z)(f(f(x)) =' z \to (\exists y)(P(x,y) \land P(y,z)))$

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{(\forall x)(\forall y)(P(x,y)\leftrightarrow f(x)=' y)}{(\forall y)(P(x,y)\leftrightarrow f(x)=' y)}\,E\forall(*4)}{P(x,f(x))\leftrightarrow f(x)=' f(x)}\,E\forall(*5) \quad \dfrac{}{f(x)=' f(x)}\,RI_1}{P(x,f(x))}\,E\leftrightarrow \quad \dfrac{[f(f(x))=' z]^1 \quad \dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{(\forall x)(\forall y)(P(x,y)\leftrightarrow f(x)=' y)}{(\forall y)(P(f(x),y)\leftrightarrow f(f(x))=' y)}\,E\forall(*1)}{P(f(x),f(f(x)))\leftrightarrow f(f(x))=' f(f(x))}\,E\forall(*2) \quad \dfrac{}{f(f(x))=' f(f(x))}\,RI_1}{P(f(x),f(f(x)))}\,E\leftrightarrow}{P(f(x),z)}\,RI_4(*3)}{P(x,f(x))\land P(f(x),z)}\,I\land}{(\exists y)(P(x,y)\land P(y,z))}\,I\exists(*6)}{f(f(x))=' z\to(\exists y)(P(x,y)\land P(y,z))}\,I\to(1)}{(\forall z)(f(f(x))=' z\to(\exists y)(P(x,y)\land P(y,z)))}\,I\forall(*7)}{(\forall x)(\forall z)(f(f(x))=' z\to(\exists y)(P(x,y)\land P(y,z)))}\,I\forall(*8)$$

(*1) $f(x)$ libre para x en $(\forall y)(P(x,y) \leftrightarrow f(x) =' y)$
(*2) $f(f(x))$ libre para y en $P(f(x),y) \leftrightarrow f(f(x)) =' y$
(*3) $f(f(x))$ y z libres para w en $P(f(x),w)$
(*4) x libre para x en $(\forall y)(P(x,y) \leftrightarrow f(x) =' y)$
(*5) $f(x)$ libre para y en $P(x,y) \leftrightarrow f(x) =' y$
(*6) $f(x)$ libre para y en $P(x,y) \land P(y,z)$
(*7) $z \notin FV(\{(\forall x)(\forall y)(P(x,y) \leftrightarrow f(x) =' y)\})$
(*8) $x \notin FV(\{(\forall x)(\forall y)(P(x,y) \leftrightarrow f(x) =' y)\})$

Ejercicio 4 (25 puntos)

Considere los siguientes conjuntos:

- $\Gamma = \{p_i \land p_j / i,j \in \mathbb{N}\}$
- $\Delta = \{p_i \to p_{i+1} / i \in \mathbb{N}\} \cup \{p_0\}$

Indique cuáles de las siguientes afirmaciones son correctas. Justifique sus respuestas.

a. $\Gamma = \Delta$
b. $\textsc{Cons}(\Gamma)$ es consistente maximal.
c. $\textsc{Cons}(\Delta)$ es consistente maximal.
d. $\textsc{Cons}(\Delta) = \textsc{Cons}(\Gamma)$.
e. Todos los conjuntos consistentes maximales son iguales (Existe un único conjunto consistente maximal).

Bosquejo de solución

a. $\Gamma = \Delta$: **Falso**. Los conjuntos tienen elementos que son sintácticamente distintos. Por ejemplo, Δ contiene una letra proposicional (p_0) y Γ no contiene ninguna por lo que los conjuntos son claramente diferentes.

b. $\textsc{Cons}(\Gamma)$ es consistente maximal: **Verdadero**.

   Consideremos las valuaciones que hacen verdaderos a todos los elementos de Γ. Estos elementos son todos los $\wedge$ de dos letras proposicionales cualesquiera. Dada una fórmula $p_i \wedge p_j$ cualquiera de gamma, de acuerdo a la definición de valuación cumple que:

$$v(p_i \wedge p_j) = 1 \Leftrightarrow v(p_i) = 1 \text{ y } v(p_j) = 1$$

   Esto hace que la única valuación v posible que hace verdadero a todos los elementos de Γ es la que hace que todas las letras propisicionales tomen el valor 1 ($(\bar{\forall} i \in \mathbb{N}) v(p_i) = 1$).

   Por este motivo, siguiendo la idea de la caracterización semántica de los conjuntos completos, Γ es un conjunto completo y por lo tanto, su $\textsc{Cons}$ es consistente maximal.

c. $\textsc{Cons}(\Delta)$ es consistente maximal: **Verdadero**.

   Dado que Γ son todas las implicaciones de letras proposicionales tal que el antecedente es exactamente la letra anterior al consecuente o p_0, cualquier valuación v que haga verdaderos a todos los elementos de Δ tiene que hacer verdadero a p_0.

   De acuerdo a la definición de valuación, se cumple que:

$$v(p_0 \to p_1) = 1 \text{ y } v(p_0) = 1 \Leftrightarrow v(p_1) = 1$$

   .

   Aplicando este razonamiento inductivamente[2], la única valuación que hace verdaderas a todas las fórmulas de Γ es la que hace verdaderas a todas las letras proposicionales.

   Siguiendo el mismo razonamiento que en la parte anterior, Γ es completo y por lo tanto $\textsc{Cons}(\Gamma)$ es consistente maximal.

d. $\textsc{Cons}(\Delta) = \textsc{Cons}(\Gamma)$: **Verdadero**.

   Esto se puede argumentar de varias formas.

   Una de ellas es basarse en que los dos conjuntos tienen una única valuación que los hacen verdaderos y que es la misma. Dada una valuación v, el conjunto consistente maximal es:

$$\{\varphi / v(\varphi) = 1\}$$

[2]Si, se debería hacer una inducción, pero en este caso la obviamos.

Esto hace que los dos conjuntos deban ser iguales a este último y por lo tanto son iguales entre sí.

Otra forma, es ver que cualquier fórmula $p_i \to p_{i+1} \in \Delta$ se puede obtener de Γ aplicando la siguiente derivación:

$$\dfrac{\dfrac{p_i \wedge p_{i+1}}{p_{i+1}}\, E\wedge}{p_i \to p_{i+1}}\, I\to$$

Además, p_0 también se puede derivar de Γ aplicando la eliminación del $\wedge$ a cualquier fórmula de Γ que contenga p_0. Se sabe que esa fórmula está en Γ por la definición del conjunto [3]

De esta forma, se prueba que $(\bar{\forall}\varphi \in \Delta)\varphi \in \textsc{Cons}(\Gamma)$ por lo que $\textsc{Cons}(\Delta) \subseteq \textsc{Cons}(\Gamma)$.

Por un razonamiento similar haciendo las derivaciones apropiadas, se puede probar que $\textsc{Cons}(\Gamma) \subseteq \textsc{Cons}(\Delta)$.

Por esto último, $\textsc{Cons}(\Gamma) = \textsc{Cons}(\Delta)$

e. Todos los conjuntos consistentes maximales son iguales (Existe un único conjunto consistente maximal): **Falso**.

Para argumentar esto, basta considerar el siguiente conjunto:

$$\Theta = \textsc{Cons}(\{\neg p_i / i \in \mathbb{N}\})$$

Este conjunto es consistente maximal, porque es una teoría y hay una única valuación que hace verdadera a todas sus fórmulas: $(\bar{\forall} i \in \mathbb{N})v(p_i) = 0$

Dada que la valuación es diferente a la de los conjuntos anteriores (al menos es diferente en $v(p_0)$), este conjuto tiene que ser diferente a los anteriores por teorema visto en el teórico.

[3] Γ es el conjunto de los $\wedge$ formados por todas las parejas de letras proposicionales por lo que tienen que estar las que tienen p_0