Examen de Lógica

07 de Diciembre de 2021

Indicaciones generales

- Apagar los celulares.
- La duración del examen es de **tres (3)** horas.
- En esta prueba **no** se permite consultar material alguno.
- **Toda respuesta debe estar fundamentada.** Pueden usarse los resultados que aparecen en el texto del curso, en esos casos debe describirse con precisión el enunciado que se utiliza.
- Numerar todas las hojas e incluir en cada una su nombre y cédula de identidad, utilizar las hojas de un solo lado, escribir con lápiz, iniciar cada ejercicio en hoja nueva y poner en la primera hoja la cantidad de hojas entregadas.

Ejercicio 1(25 puntos)

a. Dado un alfabeto Σ, la definición habitual de Σ^* se pide:

  I. Definir la función *invertir* : $\Sigma^* \to \Sigma^*$.

  II. Dada la definición de la función que concatena dos tiras *con*:

$$\begin{array}{ll} con : \Sigma^* \times \Sigma^* \to \Sigma^* & \\ con(\epsilon, w) & = w \\ con(xw_1, w_2) & = x\ con(w_1, w_2) \end{array}$$

  Probar que se cumple:

$$(\bar{\forall} w_1 \in \Sigma^*)(\forall w_2 \in \Sigma^*)(\forall w_3 \in \Sigma^*)(con(w_1, con(w_2, w_3)) = con(con(w_1, w_2), w_3))$$

b. Sea $\mathcal{L}$ un lenguaje de primer orden con igualdad de tipo de similaridad $\langle 1; 2, 1; 2\rangle$ con los símbolos P_1, f_1, f_2, c_1, c_2.

Sea una estructura de este tipo $A = \langle \Sigma^*, B, con, invertir, aa, bb\rangle$ con:

- $\Sigma = \{a, b\}$
- B definido inductivamente por las siguientes reglas:
  - I $\epsilon \in B$
  - II Si $x \in \Sigma$, $w \in B$ entonces $xwx \in B$
- $con, invertir$ las definidas en la parte a.

  I. Dar $t_1 \in \texttt{TERM}_{\mathcal{L}}$, $t_2 \in \texttt{TERM}_{\mathcal{L}}$ tales que $t_1 \neq t_2$ y $(f_2(f_1(t_1, t_2)))^A = (f_1(f_2(t_2), f_2(t_1)))^A$. Justificar su respuesta.

  II. Dar $t_3 \in \texttt{TERM}_{\mathcal{L}}$, $t_1 \neq t_3$ y $t_2 \neq t_3$ que cumple: $A \models P_1(t_3)$. Justificar su respuesta.

  III. Concluir que $A \models (\forall x_1)(\forall x_2)(\forall x_3)(f_1(x_1, f_1(x_2, x_3)) =' f_1(f_1(x_1, x_2), x_3))$

Bosquejo de solución

a. I.

$$\begin{aligned} &invertir : \Sigma^* \to \Sigma^* \\ &invertir(\epsilon) \quad = \epsilon \\ &invertir(xw) = invertir(w)x \end{aligned}$$

II. Probar :

$$(\bar{\forall} w_1 \in \Sigma^*)(\forall w_2 \in \Sigma^*)(\forall w_3 \in \Sigma^*)(con(w_1, con(w_2, w_3)) = con(con(w_1, w_2), w_3))$$

La demostración se hará usando el PIP para Σ^*.

Id. propiedad

$$P(w_1) := (\bar{\forall} w_2 \in \Sigma^*)(\bar{\forall} w_3 \in \Sigma^*)(con(w_1, con(w_2, w_3)) = con(con(w_1, w_2), w_3))$$

Sean $w_2 \in \Sigma^*$ y $w_3 \in \Sigma^*$ arbitrarios usaremos la propiedad:

$$P(w_1) := (con(w_1, con(w_2, w_3)) = con(con(w_1, w_2), w_3))$$

con w_2, w_3 los dados.

Paso Base

T) $P(\epsilon) = (con(\epsilon, con(w_2, w_3)) = con(con(\epsilon, w_2), w_3))$

Demo.

$$\begin{aligned} &con(\epsilon, con(w_2, w_3)) \\ &= \text{(Def. } con\text{)} \\ &con(w_2, w_3) \\ &= \text{(Def. } con\text{)} \\ &con(con(\epsilon, w_2), w_3) \\ &\square \end{aligned}$$

Paso Inductivo

H) $P(w_1) = con(w_1, con(w_2, w_3)) = con(con(w_1, w_2), w_3)$

T) $P(xw_1) = con(xw_1, con(w_2, w_3)) = con(con(xw_1, w_2), w_3)$

Demo.

$$\begin{aligned} &con(xw_1, con(w_2, w_3)) \\ &= \text{(Def. de } con\text{)} \\ &xcon(w_1, con(w_2, w_3)) \\ &= \text{(Hipótesis)} \\ &xcon(con(w_1, w_2), w_3) \\ &= \text{(Def. de } con\text{)} \\ &con(xcon(w_1, w_2), w_3) \\ &= \text{(Def. de } con\text{)} \\ &con(con(xw_1, w_2), w_3) \\ &\square \end{aligned}$$

Por lo demostrado en el Paso Base, Paso Inductivo, aplicación del PIP y el uso de las variables genéricas w_1, w_2 queda demostrada la propiedad

$$(\bar{\forall} w_1 \in \Sigma^*)(\forall w_2 \in \Sigma^*)(\forall w_3 \in \Sigma^*)(con(w_1, con(w_2, w_3)) = con(con(w_1, w_2), w_3))$$

b. Definimos el conjunto $\texttt{TERM}_{\mathcal{L}}$ como el conjunto definido inductivamente por las siguientes reglas:

I $x_i \in \texttt{TERM}_{\mathcal{L}}$ con $i \in \mathbb{N}$

II $c_1 \in \texttt{TERM}_{\mathcal{L}}$

III $c_2 \in \texttt{TERM}_{\mathcal{L}}$

IV Si $t_1, t_2 \in \texttt{TERM}_{\mathcal{L}}$ entonces $f_1(t_1, t_2) \in \texttt{TERM}_{\mathcal{L}}$

V Si $t_1 \in \texttt{TERM}_{\mathcal{L}}$ entonces $f_2(t_1) \in \texttt{TERM}_{\mathcal{L}}$

I. Sean $t_1 = c_1$ y $t_2 = c_2$. t_1 y t_2 pertenecen a $\texttt{TERM}_{\mathcal{L}}$ ya que se obtienen por aplicación de las reglas ii) y iii) de la definición del conjunto.

$$
\begin{aligned}
&(f_2(f_1(t_1, t_2)))^A \\
&= \text{(sustituyo por los términos seleccionados)} \\
&(f_2(f_1(c_1, c_2)))^A \\
&= \text{(interpretación de las funciones en } A) \\
&invertir(con(c_1^A, c_2^A)) \\
&= \text{(interpretación de las constantes en } A) \\
&invertir(con(aa, bb)) \\
&= \text{(def. con)} \\
&invertir(aabb) \\
&= \text{(def. invertir)} \\
&bbaa \\
&\Box(I)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&(f_1(f_2(t_2), f_2(t_1)))^A \\
&= \text{(sustituyo por los términos seleccionados)} \\
&(f_1(f_2(c_2), f_2(c_1)))^A \\
&= \text{(interpretación de las funciones en } A) \\
&con(invertir(c_2^A), invertir(c_1^A)) \\
&= \text{(interpretación de las constantes en } A) \\
&con(invertir(bb), invertir(aa)) \\
&= \text{(def. invertir)} \\
&con(bb, aa) \\
&= \text{(def. con)} \\
&bbaa \\
&\Box(II)
\end{aligned}
$$

(I) = (II)

II. Sea $t_3 = f_2(c_1)$

$t_3 \in \texttt{TERM}_{\mathcal{L}}$ ya que se obtiene por aplicación de la regla v) de la definición de $\texttt{TERM}_{\mathcal{L}}$ al término c_1.

$f_2(c_1) \neq c_1$ y $f_2(c_1) \neq c_2$

$$
\begin{array}{l}
A \models P_1(f_2(c_1)) \\
\Leftrightarrow \text{(def. de } \models) \\
v^A(P_1(f_2(c_1))) = 1 \\
\Leftrightarrow \text{(def. de } v^A) \\
(f_2(c_1))^A \in P_1^A \\
\Leftrightarrow \text{(def. de interpretación y } A) \\
invertir(c_1^A) \in B \\
\Leftrightarrow \text{(def. de interpretación y } A) \\
invertir(aa) \in B \\
\Leftrightarrow \text{(def.de invertir)} \\
aa \in B
\end{array}
$$

Esta afirmación es verdadera y para demostrarla se da una forma de construir el elemento aa usando las reglas que definen el conjunto B.

1) $\epsilon \in B$ - por aplicación de la regla i) de la def. de B.
2) $aa \in B$ - por aplicación de la regla ii) de la def. de B tomando $x = a$ y $w = \epsilon$.

III. $A \models (\forall x_1)(\forall x_2)(\forall x_3)(f_1(x_1, f_1(x_2, x_3)) =' f_1(f_1(x_1, x_2), x_3))$

$$
\begin{array}{l}
A \models (\forall x_1)(\forall x_2)(\forall x_3)(f_1(x_1, f_1(x_2, x_3)) =' f_1(f_1(x_1, x_2), x_3)) \\
\Leftrightarrow \text{(2.4.5, caso universal 3 veces y definición de } A) \\
(\bar{\forall} w_1 \in \Sigma^*)(\bar{\forall} w_2 \in \Sigma^*)(\bar{\forall} w_3 \in \Sigma^*) \\
\qquad A \models (f_1(x_1, f_1(x_2, x_3)) =' f_1(f_1(x_1, x_2), x_3))[\bar{w_1}/x_1][\bar{w_2}/x_2][\bar{w_3}/x_3] \\
\Leftrightarrow \text{(sustitución)} \\
(\bar{\forall} w_1 \in \Sigma^*)(\bar{\forall} w_2 \in \Sigma^*)(\bar{\forall} w_3 \in \Sigma^*) A \models f_1(\bar{w_1}, f_1(\bar{w_2}, \bar{w_3})) =' f_1(f_1(\bar{w_1}, \bar{w_2}), \bar{w_3}) \\
\Leftrightarrow \text{(def. de } \models) \\
(\bar{\forall} w_1 \in \Sigma^*)(\bar{\forall} w_2 \in \Sigma^*)(\bar{\forall} w_3 \in \Sigma^*)(v^A(f_1(\bar{w_1}, f_1(\bar{w_2}, \bar{w_3})) =' f_1(f_1(\bar{w_1}, \bar{w_2}), \bar{w_3})) = 1) \\
\Leftrightarrow \text{(def. de } v^A) \\
(\bar{\forall} w_1 \in \Sigma^*)(\bar{\forall} w_2 \in \Sigma^*)(\bar{\forall} w_3 \in \Sigma^*)((f_1(\bar{w_1}, f_1(\bar{w_2}, \bar{w_3})))^A = (f_1(f_1(\bar{w_1}, \bar{w_2}), \bar{w_3}))^A) \\
\Leftrightarrow \text{(def. interpretación de términos y def. de } A) \\
(\bar{\forall} w_1 \in \Sigma^*)(\bar{\forall} w_2 \in \Sigma^*)(\bar{\forall} w_3 \in \Sigma^*)(con(w_1, con(w_2, w_3)) = con(con(w_1, w_2), w_3))
\end{array}
$$

Esta última afirmación es verdadera, fue demostrada en aII.

Ejercicio 2 (25 puntos)

Se considera un lenguaje de primer orden con tipo de similaridad $\langle 1, 1, 1 \rangle$ con símbolo de predicado P y símbolo de función f, ambos de aridad 1.

a. Se considera una estructura $\mathcal{M} = \langle U, R, F, w \rangle$.

Sean $a, b \in U$ tal que F(a) = b. Probar que se cumple:

I. $\mathcal{M} \models f(\bar{a}) =' \bar{b}$

II. Para toda $\varphi \in$ `FORM` tal que $\mathrm{FV}(\varphi) = \{y\}$: $\mathcal{M} \models \varphi[^{f(\bar{a})}/_y] \Leftrightarrow \mathcal{M} \models \varphi[^{\bar{b}}/_y]$.

Sugerencia: Usar el teorema de sustitución:

Sean $t, t' \in$ `TERM`, $\alpha \in$ `FORM` tales que t y t' están libres para x en α. Entonces:

$$\models t =' t' \to (\alpha[^t/_x] \leftrightarrow \alpha[^{t'}/_x])$$

b. Sea $\varphi \in \texttt{FORM}, \mathrm{FV}(\varphi) = \{x, y\}$, x libre para y en φ.

I. Probar que para toda estructura $\mathcal{M}$ del tipo adecuado se cumple:

$$\mathcal{M} \models \varphi[{}^{f(x)}/_{y}] \Rightarrow \mathcal{M} \models \exists y \varphi$$

Puede utilizar sin probar la siguiente propiedad de las sustituciones:

$$\alpha[{}^{f(x)}/_{y}][{}^{t}/_{x}] = \alpha[{}^{t}/_{x}][{}^{f(t)}/_{y}]$$

donde α es una fórmula cualquiera, x e y son variables distintas, x está libre para y en α y t es un término cerrado (no contiene variables).

II. Probar con un contraejemplo que el recíproco no se cumple.

Bosquejo de solución

a. I.

$$\begin{array}{l} \mathcal{M} \models f(\bar{a}) =' \bar{b} \\ \Leftrightarrow \text{(def. de modelo)} \\ v^{\mathcal{M}}(f(\bar{a}) =' \bar{b}) = 1 \\ \Leftrightarrow \text{(def. de } v^{\mathcal{M}}) \\ f(\bar{a})^{\mathcal{M}} = \bar{b}^{\mathcal{M}} \\ \Leftrightarrow \text{(interpretación de términos)} \\ f^{\mathcal{M}}(\bar{a}^{\mathcal{M}}) = b \\ \Leftrightarrow \text{(def. de } \mathcal{M}) \\ F(a) = b \\ \square \end{array}$$

La última igualdad se cumple por hipótesis.

II. Consideramos una estructura $\mathcal{M}$. Aplicando teorema de sustitución y definición de *verdad lógica*:

$$\mathcal{M} \models t =' t' \to \alpha[{}^{t}/_{x}] \leftrightarrow \alpha[{}^{t'}/_{x}]$$

Vamos a considerar la siguiente instancia de este esquema:

$$\mathcal{M} \models f(\bar{a}) =' \bar{b} \to \varphi[{}^{f(\bar{a})}/_{y}] \leftrightarrow \varphi[{}^{\bar{b}}/_{y}]$$

Vemos que $f(\bar{a})$ y $\bar{b}$ son términos cerrados por lo que están libres para cualquier variable en cualquier fórmula. Entonces tendremos:

$$\begin{array}{l} \mathcal{M} \models f(\bar{a}) =' \bar{b} \to \varphi[{}^{f(\bar{a})}/_{y}] \leftrightarrow \varphi[{}^{\bar{b}}/_{y}] \\ \Leftrightarrow \text{(2.4.5)} \\ \mathcal{M} \models f(\bar{a}) =' \bar{b} \Rightarrow \mathcal{M} \models \varphi[{}^{f(\bar{a})}/_{y}] \leftrightarrow \varphi[{}^{\bar{b}}/_{y}] \end{array}$$

Observar que $f(\bar{a}) =' \bar{b} \to \varphi[{}^{f(\bar{a})}/_{y}] \leftrightarrow \varphi[{}^{\bar{b}}/_{y}]$ es sentencia ya que la única variable de φ es y. Esto valida la aplicación de (2.4.5).

La hipótesis de la última implicancia fue probada en la parte anterior. Se obtiene entonces:

$$\mathcal{M} \models \varphi[{}^{f(\bar{a})}/_{y}] \leftrightarrow \varphi[{}^{\bar{b}}/_{y}]$$
$$\Leftrightarrow \text{ (2.4.5)}$$
$$\mathcal{M} \models \varphi[{}^{f(\bar{a})}/_{y}] \Leftrightarrow \mathcal{M} \models \varphi[{}^{\bar{b}}/_{y}]$$
$$\square$$

b. Suponemos $\mathcal{M} \models \varphi[{}^{f(x)}/_{y}]$

$$\mathcal{M} \models \varphi[{}^{f(x)}/_{y}]$$
$$\Leftrightarrow \text{ (clausura)}$$
$$\mathcal{M} \models (\forall x)(\varphi[{}^{f(x)}/_{y}])$$
$$\Leftrightarrow \text{ (2.4.5)}$$
$$(\bar{\forall} a \in |\mathcal{M}|) : \ \mathcal{M} \models (\varphi[{}^{f(x)}/_{y}])[{}^{\bar{a}}/_{x}]$$
$$\Leftrightarrow \text{ (propiedad de la sustitución)}$$
$$(\bar{\forall} a \in |\mathcal{M}|) : \ \mathcal{M} \models \varphi[{}^{\bar{a}}/_{x}][{}^{f(\bar{a})}/_{y}]$$

Sabemos que $\mathrm{FV}(\varphi) = \{x, y\}$; entonces $\mathrm{FV}(\varphi[{}^{\bar{a}}/_{x}]) = \{y\}$. Por lo tanto podemos aplicar la propiedad probada en a-(i):

$$(\bar{\forall} a \in |\mathcal{M}|) : \ \mathcal{M} \models \varphi[{}^{\bar{a}}/_{x}][{}^{f(\bar{a})}/_{y}]$$
$$\Leftrightarrow \text{ (propiedad probada a-(i))}$$
$$(\bar{\forall} a \in |\mathcal{M}|) : \ \mathcal{M} \models \varphi[{}^{\bar{a}}/_{x}][{}^{\bar{b}}/_{y}] \text{ donde } b = F(a)$$
$$\Leftrightarrow \text{ (Tomando } b \text{ como testigo)}$$
$$(\bar{\forall} a \in |\mathcal{M}|)(\bar{\exists} b \in |\mathcal{M}|) : \ \mathcal{M} \models \varphi[{}^{\bar{a}}/_{x}][{}^{\bar{b}}/_{y}]$$
$$\Leftrightarrow \text{ (2.4.5)}$$
$$(\bar{\forall} a \in |\mathcal{M}|) : \ \mathcal{M} \models (\exists y)(\varphi[{}^{\bar{a}}/_{x}])$$
$$\Leftrightarrow \text{ (sustitución)}$$
$$(\bar{\forall} a \in |\mathcal{M}|) : \ \mathcal{M} \models (\exists y)\varphi[{}^{\bar{a}}/_{x}]$$
$$\Leftrightarrow \text{ (2.4.5)}$$
$$\mathcal{M} \models (\forall x)(\exists y)\varphi$$
$$\Leftrightarrow \text{ (clausura)}$$
$$\mathcal{M} \models (\exists y)\varphi$$

c. Contraejemplo:

- $\varphi := y =' x$.
- $\mathcal{M} = \langle \{\bigcirc, \bullet\}, F, \emptyset, \bullet \rangle$ donde F es la función constante que asigna $\bullet$ a todo elemento de $\mathcal{M}$.

  Vemos que se cumple $\mathrm{FV}(\varphi) = \{x, y\}$ y x libre para y en φ.

Probaremos que $\mathcal{M} \models (\exists y) y = x$:

$$\mathcal{M} \models (\exists y) y =' x$$
$$\Leftrightarrow \text{ (clausura)}$$
$$\mathcal{M} \models (\forall x)(\exists y) y =' x$$
$$\Leftrightarrow \text{ (2.4.5 varios pasos)}$$
$$(\bar{\forall} a \in |\mathcal{M}|)(\bar{\exists} b \in |\mathcal{M}|)\mathcal{M} \models \bar{a} =' \bar{b}$$
$$\Leftrightarrow \text{ (def. de } v^{\mathcal{M}})$$
$$(\bar{\forall} a \in |\mathcal{M}|)(\bar{\exists} b \in |\mathcal{M}|)\mathcal{M} \models a = b$$

La última expresión es verdadera ya que para cualquier a podemos tomar $b = a$ como testigo del existencial.

Por otro lado: $\mathcal{M} \not\models f(x) = x$:

$$
\begin{array}{l}
\mathcal{M} \models f(x) =' x \\
\Leftrightarrow \text{(clausura)} \\
\mathcal{M} \models (\forall x) f(x) =' x \\
\Leftrightarrow \text{(2.4.5)} \\
(\bar{\forall} a \in |\mathcal{M}|)\mathcal{M} \models f(\bar{a}) =' \bar{a} \\
\Leftrightarrow \text{(def. de } v^{\mathcal{M}}) \\
(\bar{\forall} a \in |\mathcal{M}|) F(a) = a
\end{array}
$$

La última expresión no se cumple ya que $F(\bigcirc) = \bullet \neq \bigcirc$.

Ejercicio 3 (25 puntos)

Construir derivaciones para probar los siguientes juicios. En ningún caso son válidas consideraciones semánticas.

a. $(\alpha \leftrightarrow \beta) \wedge (\alpha \leftrightarrow \neg\beta) \vdash \bot$
b. $(\forall x)(P(x) \vee P(f(x))), (\exists x) f(x) =' x \vdash (\exists x)(P(x) \wedge P(f(x)))$

Bosquejo de solución

a. $(\alpha \leftrightarrow \beta) \wedge (\alpha \leftrightarrow \neg\beta) \vdash \bot$

$$
\dfrac{
\dfrac{\dfrac{
\dfrac{\dfrac{(\alpha \leftrightarrow \beta) \wedge (\alpha \leftrightarrow \neg\beta)}{\alpha \leftrightarrow \neg\beta} E\wedge \quad \dfrac{\dfrac{(\alpha \leftrightarrow \beta) \wedge (\alpha \leftrightarrow \neg\beta)}{\alpha \leftrightarrow \beta} E\wedge \quad [\beta]^1}{\alpha} E\leftrightarrow}{\neg\beta} E\leftrightarrow \quad [\beta]^1
}{\bot} E\neg}{\neg\beta} I\neg^{(1)}
\quad
\dfrac{\dfrac{
[\neg\beta]^2 \quad \dfrac{\dfrac{(\alpha \leftrightarrow \beta) \wedge (\alpha \leftrightarrow \neg\beta)}{\alpha \leftrightarrow \beta} E\wedge \quad \dfrac{\dfrac{(\alpha \leftrightarrow \beta) \wedge (\alpha \leftrightarrow \neg\beta)}{\alpha \leftrightarrow \neg\beta} E\wedge \quad [\neg\beta]^2}{\alpha} E\leftrightarrow}{\beta} E\leftrightarrow
}{\bot} E\neg}{\beta} RAA^{(2)}
}{\bot} E\neg
$$

Otra solución:

Consideramos la siguiente derivación de $(\alpha \leftrightarrow \beta) \wedge (\alpha \leftrightarrow \neg\beta) \vdash \neg\beta$

$$
\dfrac{\dfrac{
\dfrac{\dfrac{(\alpha \leftrightarrow \beta) \wedge (\alpha \leftrightarrow \neg\beta)}{(\alpha \leftrightarrow \neg\beta)} E_\wedge \quad \dfrac{\dfrac{(\alpha \leftrightarrow \beta) \wedge (\alpha \leftrightarrow \neg\beta)}{(\alpha \leftrightarrow \beta)} E_\wedge \quad [\beta]^1}{\alpha} E_\leftrightarrow}{\neg\beta} E_\leftrightarrow \quad [\beta]^1
}{\bot} E_\neg}{\neg\beta} I_\neg{}^1
$$

A partir de la derivación anterior Π_1 construimos la derivación pedida:

$$\dfrac{\begin{matrix}\Pi_1\\ \neg\beta\end{matrix} \quad \dfrac{\dfrac{(\alpha\leftrightarrow\beta)\wedge(\alpha\leftrightarrow\neg\beta)}{(\alpha\leftrightarrow\beta)}\,E_\wedge \quad \dfrac{\dfrac{(\alpha\leftrightarrow\beta)\wedge(\alpha\leftrightarrow\neg\beta)}{(\alpha\leftrightarrow\neg\beta)}\,E_\wedge \quad \begin{matrix}\Pi_1\\ \neg\beta\end{matrix}}{\alpha}\,E_\leftrightarrow}{\beta}\,E_\leftrightarrow}{\bot}\,E_\neg$$

b. $(\forall x)(P(x) \vee P(f(x))), (\exists x)f(x) =' x \vdash (\exists x)(P(x) \wedge P(f(x)))$

$$\dfrac{(\exists x)f(x) = x \qquad \dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{(\forall x)(P(x)\vee P(f(x)))}{P(x)\vee P(f(x))}\,E\forall(*1) \quad [P(x)]^2 \quad \dfrac{[f(x) =' x]^1 \quad [P(f(x))]^2}{P(x)}\,RI_4(*2)}{P(x)}\,E\vee^{(2)} \qquad \dfrac{\dfrac{(\forall x)(P(x)\vee P(f(x)))}{P(x)\vee P(f(x))}\,E\forall(*3) \quad \dfrac{\dfrac{[f(x) =' x]^1}{x =' f(x)}\,RI_2 \quad [P(x)]^3}{P(f(x))}\,RI_4(*4) \quad [P(f(x))]^3}{P(f(x))}\,E\vee^{(3)}}{P(x)\wedge P(f(x))}\,I\wedge}{(\exists x)(P(x)\wedge P(f(x)))}\,I\exists(*5)}{(\exists x)(P(x)\wedge P(f(x)))}\,E\exists^{(1)}(*6)$$

(*1) x libre para x en $P(x) \vee P(f(x))$

(*2) $f(x)$ y x libres para z en $P(z)$

(*3) x libre para x en $P(x) \vee P(f(x))$

(*4) x y $f(x)$ libres para z en $P(z)$

(*5) x libre para x en $P(x) \wedge P(f(x))$

(*6) $x \notin FV(\{(\forall x)(P(x) \vee P(f(x))), (\exists x)(P(x) \wedge P(f(x)))\})$

Ejercicio 4 (25 puntos)

Indique cuáles de los siguientes conjuntos son consistentes, cuáles son completos y cuáles son consistentes maximales. Justifique sus respuestas.

a. $\{p_j \wedge \neg p_{j+1} \wedge \neg p_{j+2} | j = \dot{6}\}$
b. $\{\neg p_j \wedge p_{j+1} \wedge \neg p_{j+2} | j = \dot{3}\}$
c. $\textsc{Cons}(\{p_j \wedge \neg p_{j+1} \wedge \neg p_{j+2} | j = \dot{6}\}) \cup \textsc{Cons}(\{\neg p_j \wedge p_{j+1} \wedge \neg p_{j+2} | j = \dot{3}\})$
d. $\textsc{Cons}(\{\neg p_j \wedge p_{j+1} \wedge \neg p_{j+2} | j = \dot{3}\})$

Bosquejo de solución

a. El conjunto es consistente, pero no completo ni consistente maximal. Sean:

$$v_a(p_i) = \begin{cases} 1 \text{ si } i = \dot{6} \\ 0 \text{ en caso contrario} \end{cases}$$

$$v'_a(p_i) = \begin{cases} 1 \text{ si } i = \dot{3} \\ 0 \text{ en caso contrario} \end{cases}$$

y sea k un múltiplo de 6 arbitrario. Entonces,

$$
\begin{aligned}
& v_a(p_k \wedge \neg p_{k+1} \wedge \neg p_{k+2}) \\
& = \text{(def. de valuación)} \\
& min(v_a(p_k), v_a(\neg p_{k+1}), v_a(\neg p_{k+2})) \\
& = \text{(def. de valuación)} \\
& min(v_a(p_k), 1 - v_a(p_{k+1}), 1 - v_a(p_{k+2})) \\
& = \text{(def. de valuación y } v_a) \\
& min(1, 1 - 0, 1 - 0) \\
& = 1
\end{aligned}
$$

Además,

$$
\begin{aligned}
& v_a'(p_k \wedge \neg p_{k+1} \wedge \neg p_{k+2}) \\
& = \text{(def. de valuación)} \\
& min(v_a'(p_k), v_a'(\neg p_{k+1}), v_a'(\neg p_{k+2})) \\
& = \text{(def. de valuación)} \\
& min(v_a'(p_k), 1 - v_a'(p_{k+1}), 1 - v_a'(p_{k+2})) \\
& = (k = \dot{3}\text{, ya que es múltiplo de 6}) \\
& min(1, 1 - 0, 1 - 0) \\
& = 1
\end{aligned}
$$

Por lo tanto, el conjunto es consistente (v_a lo satisface), pero no es completo porque hay al menos 2 valuaciones que lo satisfacen. Además, no es consistente maximal por no ser completo.

b. El conjunto es consistente y completo, pero no consistente maximal. Sean:

$$
v_b(p_i) = \begin{cases} 1 \text{ si } i = \dot{3} + 1 \\ 0 \text{ en caso contrario} \end{cases}
$$

y k un múltiplo de 3 arbitrario. Entonces,

$$
\begin{aligned}
& v_b(\neg p_k \wedge p_{k+1} \wedge \neg p_{k+2}) \\
& = \text{(def. de valuación)} \\
& min(v_b(\neg p_k), v_b(p_{k+1}), v_b(\neg p_{k+2})) \\
& = \text{(def. de valuación)} \\
& min(1 - v_b(p_k), v_b(p_{k+1}), 1 - v_b(p_{k+2})) \\
& = \text{(def. de valuación y } v_b) \\
& min(1 - 0, 1, 1 - 0) \\
& = 1
\end{aligned}
$$

Por lo que el conjunto es consistente, ya que v_b lo satisface. Por otra parte, sea v_b' otra valuación arbitraria que satisfaga el conjunto.

$$
\begin{aligned}
& v_b'(\neg p_k \wedge p_{k+1} \wedge \neg p_{k+2}) = 1 \\
& \Leftrightarrow \text{(def. de valuación)} \\
& min(v_b'(\neg p_k), v_b'(p_{k+1}), v_b'(\neg p_{k+2})) = 1 \\
& \Leftrightarrow \text{(def. de valuación)} \\
& min(1 - v_b'(p_k), v_b'(p_{k+1}), 1 - v_b'(p_{k+2})) = 1 \\
& \Rightarrow \text{(def. de valuación)} \\
& v_b'(p_k) = 0 \text{ y } v_b'(p_{k+1}) = 1 \text{ y } v_b'(p_{k+2})) = 0
\end{aligned}
$$

Por lo tanto, $v'_b = v_b$, y como existe una única valuación que satisface el conjunto, éste es completo.

Finalmente, $\neg\bot$ no pertenece al conjunto (por no ser de la forma $\neg p_k \land p_{k+1} \land \neg p_{k+2}$), pero si lo agregamos al conjunto, la misma valuación v_b lo satisface, ya que por definición de valuación $v_b(\neg\bot) = 1$. Por lo tanto, el conjunto no es consistente maximal.

c. El conjunto no es consistente (y por lo tanto tampoco es completo ni consistente maximal). Suponemos que existe una valuación v_c que lo satisface. Es decir:

$$v_c(\textsc{Cons}(\{p_j \land \neg p_{j+1} \land \neg p_{j+2} | j = \dot{6}\}) \cup \textsc{Cons}(\{\neg p_j \land p_{j+1} \land \neg p_{j+2} | j = \dot{3}\})) = 1$$

Pero si v_c satisface a todo el conjunto, en particular debe satisfacer estas dos fórmulas que pertenecen a él:

$$v_c(p_6 \land \neg p_7 \land \neg p_8) = 1 \text{ y } v_c(\neg p_6 \land p_7 \land \neg p_8) = 1$$

Esto implica por un lado que $v_c(p_6) = 1$, y a la vez que $v_c(p_6) = 0$, lo que es absurdo. Por lo tanto no existe una valuación que satisfaga el conjunto, así que es inconsistente.

d. Sea $\Gamma_b = \{\neg p_k \land p_{k+1} \land \neg p_{k+2} | j = \dot{3}\}$. Sabemos, por definición de $\textsc{Cons}$, que

$$\Gamma_b \subseteq \textsc{Cons}(\Gamma_b)$$

Por lo tanto cualquier valuación que satisfaga $\textsc{Cons}(\Gamma_b)$ debe satisfacer en particular a Γ_b. Como en la parte b probamos que v_b es la única valuación que satisface Γ_b, y a su vez $v_b(\textsc{Cons}(\Gamma_b)) = 1$, concluimos que existe una única valuación que satisface el conjunto, por lo que es completo.

Como además es teoría por ser un $\textsc{Cons}$, el conjunto es consistente maximal.