Examen (Parte B) de Lógica

04 de Agosto de 2021

Indicaciones generales

- La duración del examen es de **una hora y media**.
- En esta prueba **no** se permite consultar material alguno.
- Puntaje: **50** puntos.
- **Toda respuesta debe estar fundamentada.** Pueden usarse los resultados que aparecen en el texto del curso, en esos casos debe describirse con precisión el enunciado que se utiliza.
- Incluir en la primera hoja de las soluciones una foto de la CI

Ejercicio 3 (25 puntos)

Construya derivaciones que prueben los siguientes juicios. En ningún caso son válidas consideraciones semánticas:

a. $(p \land q) \lor (p \leftrightarrow q) \vdash p \lor \neg q$

b. $(\forall x) f(x,x) =' g(x), (\forall x) P(g(x)) \vdash \neg(\exists x)(\exists y)(f(x,x) =' y \land \neg P(y))$

Bosquejo de solución

a. $(p \land q) \lor (p \leftrightarrow q) \vdash p \lor \neg q$

- $$\dfrac{[\neg(p \lor \neg q)]^1 \qquad \dfrac{\dfrac{\dfrac{[\neg(p \lor \neg q)]^1 \qquad \dfrac{\dfrac{(p \land q) \lor (p \leftrightarrow q) \qquad \dfrac{[p \land q]^3}{p}\,E\land \qquad \dfrac{[p \leftrightarrow q]^3 \quad [q]^2}{p}\,E\leftrightarrow}{p}\,E\lor^3}{p \lor \neg q}\,I\lor}{\dfrac{\bot}{\neg q}\,I\neg^2}\,E\neg}{p \lor \neg q}\,I\lor}{\dfrac{\bot}{p \lor \neg q}\,RAA^1}\,E\neg$$

- $$\dfrac{(p \land q) \lor (p \leftrightarrow q) \qquad \dfrac{\dfrac{[p \land q]^3}{p}\,E\land}{p \lor \neg q}\,I\lor \qquad \dfrac{[\neg(p \lor \neg q)]^2 \qquad \dfrac{\dfrac{[\neg(p \lor \neg q)]^2 \qquad \dfrac{\dfrac{[p \leftrightarrow q]^3 \quad [q]^1}{p}\,E\leftrightarrow}{p \lor \neg q}\,I\lor}{\dfrac{\bot}{\neg q}\,I\neg(1)}\,E\neg}{p \lor \neg q}\,I\lor}{\dfrac{\bot}{p \lor \neg q}\,RAA(2)}\,E\neg}{p \lor \neg q}\,E\lor(3)$$

-

$$
\dfrac{\dfrac{[\neg(p\vee\neg q)]^4 \quad \dfrac{\dfrac{\dfrac{[\neg(p\vee\neg q)]^4 \quad \dfrac{\dfrac{\dfrac{(p\wedge q)\vee(p\leftrightarrow q) \quad \dfrac{[\neg p]^3 \quad \dfrac{[p\wedge q]^1}{p}\,E\wedge}{\bot}\,E\neg \quad \dfrac{[\neg p]^3 \quad \dfrac{[p\leftrightarrow q]^1 \quad [q]^2}{p}\,E\leftrightarrow}{\bot}\,E\neg}{\bot}\,E\vee(1)}{\neg q}\,I\neg(2)}{p\vee\neg q}\,I\vee}{\bot}\,E\neg}{p}\,RAA(3)}{p\vee\neg q}\,I\vee}{\bot}\,E\neg}{p\vee\neg q}\,RAA(4)
$$

b. $(\forall x)f(x,x) =' g(x), (\forall x)P(g(x)) \vdash \neg(\exists x)(\exists y)(f(x,x) =' y \wedge \neg P(y))$

$$
\dfrac{\dfrac{[(\exists x)(\exists y)(f(x,x)=' y\wedge\neg P(y))]^1 \quad \dfrac{[(\exists y)(f(x,x)=' y\wedge\neg P(y))]^2 \quad \dfrac{\dfrac{[f(x,x)=' y\wedge\neg P(y)]^3}{\neg P(y)}\,E\wedge \quad \dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{(\forall x)f(x,x)=' g(x)}{f(x,x)=' g(x)}\,E\forall{*4}}{g(x)=' f(x,x)}\,RI2 \quad \dfrac{[f(x,x)=' y\wedge\neg P(y)]^3}{f(x,x)=' y}\,E\wedge}{g(x)=' y}\,RI3 \quad \dfrac{(\forall x)P(g(x))}{P(g(x))}\,E\forall{*5}}{P(y)}\,RI4{*3}}{\bot}\,E\neg}{\bot}\,E\exists^3{*2}}{\bot}\,E\exists^2{*1}}{\neg(\exists x)(\exists y)(f(x,x)=' y\wedge\neg P(y))}\,I\neg^1
$$

***1** $x \notin FV(\bot, (\forall x)f(x,x) =' g(x), (\forall x)\neg P(g(x)))$.

***2** $y \notin FV(\bot, (\forall x)f(x,x) =' g(x), (\forall x)\neg P(g(x)))$.

***3** $g(x)$ e y están libres para z en $P(z)$.

***4** x libre para x en $f(x,x) =' g(x)$.

***5** x libre para x en $P(g(x))$.

$$
\dfrac{\dfrac{[(\exists x)(\exists y)(f(x,x)=' y\wedge\neg P(y))]^3 \quad \dfrac{[(\exists y)(f(x,x)=' y\wedge\neg P(y))]^2 \quad \dfrac{\dfrac{[f(x,x)=' y\wedge\neg P(y)]^1}{\neg P(y)}\,E\wedge \quad \dfrac{\dfrac{[f(x,x)=' y\wedge\neg P(y)]^1}{f(x,x)=' y}\,E\wedge \quad \dfrac{\dfrac{\dfrac{(\forall x)f(x,x)=' g(x)}{f(x,x)=' g(x)}\,E\forall{*1}}{g(x)=' f(x,x)}\,RI2 \quad \dfrac{(\forall x)P(g(x))}{P(g(x))}\,E\forall{*2}}{P(f(x,x))}\,RI4({*3})}{P(y)}\,RI4({*4})}{\bot}\,E\neg}{\bot}\,E\exists(1)({*5})}{\bot}\,E\exists(2)({*6})}{\neg(\exists x)(\exists y)(f(x,x)=' y\wedge\neg P(y))}\,I\neg(3)
$$

***1** x libre para x en $f(x,x) =' g(x)$.

***2** x libre para x en $P(g(x))$.

***3** $g(x)$ e $f(x,x)$ están libres para z en $P(z)$.

***4** $f(x,x)$ e y están libres para z en $P(z)$.

***5** $y \notin FV(\bot, (\forall x)f(x,x) =' g(x), (\forall x)\neg P(g(x)))$.

***6** $x \notin FV(\bot, (\forall x)f(x,x) =' g(x), (\forall x)\neg P(g(x)))$.

Ejercicio 4 (25 puntos)

Considere un lenguaje de primer orden con igualdad de tipo de similaridad $\langle 1, 1; -; 1\rangle$ con símbolos de predicados P, Q y símbolo de constante c.

Demuestre o dé un contraejemplo de las siguientes afirmaciones:

a. $(\bar{\forall}\varphi \in \mathtt{SENT})(\varphi \not\mathtt{eq}\ (\forall x)P(x) \Rightarrow (Mod((\forall x)P(x)) - Mod(\varphi)) \neq \emptyset)$
b. $\textsc{Cons}((\exists x)(P(x) \land Q(x)))$ es consistente maximal.
c. $(\bar{\forall}\Delta \subseteq \mathtt{SENT})(\Delta$ es teoría y $\bot \notin \Delta \Rightarrow Th(\emptyset) \cap \Delta$ es teoría consistente$)$

Bosquejo de solución

a. La afirmación es **falsa**.
Sea $\varphi = (\exists x)P(x)$. Primero observamos que $\varphi \not\mathtt{eq}\ (\forall x)P(x)$:

$$\begin{array}{l} \varphi \not\mathtt{eq}\ (\forall x)P(x) \\ \Leftrightarrow \text{(def. eq)} \\ \not\models \varphi \leftrightarrow (\forall x)P(x) \\ \Leftarrow \text{(def } \models \text{ y 2.4.5)} \\ (\bar{\exists}\mathcal{M} \text{ e.t.a.})\ \mathcal{M} \models \varphi \text{ y } \mathcal{M} \not\models (\forall x)P(x) \end{array}$$

Esto se cumple tomando $\mathcal{M}_1 = \langle\{\circ, \bullet\}, \{\circ\}, \{\circ\}\rangle$ como testigo como se muestra a continuación:

$$\begin{array}{l} \mathcal{M}_1 \models \varphi \\ \Leftrightarrow \text{(def. } \varphi) \\ \mathcal{M}_1 \models (\exists x)P(x) \\ \Leftrightarrow \text{(2.4.5., sust. y def. } \mathcal{M}_1) \\ (\bar{\exists} a \in \{\circ, \bullet\})\ a \in \{\circ\} \\ \text{(Se cumple tomando } a = \circ) \end{array}$$

$$\begin{array}{l} \mathcal{M}_1 \not\models (\forall x)P(x) \\ \Leftrightarrow \text{(contrarrecíp. 2.4.5., sust y def. } \mathcal{M}_1) \\ (\bar{\exists} b \in \{\circ, \bullet\})\ b \notin \{\circ\} \\ \text{(Se cumple tomando } b = \bullet) \end{array}$$

Luego, probaremos $(\forall x)P(x) \models \varphi$ que es equivalente por los teoremas de completitud y corrección a $(\forall x)P(x) \vdash \varphi$. La siguiente derivación justifica $(\forall x)P(x) \vdash \varphi$:

$$\dfrac{\dfrac{(\forall x)P(x)}{P(x)}\ E_\forall(*_1)}{(\exists x)P(x)}\ I_\exists(*_1)$$

$(*_1)$ x está libre para x en $P(x)$.

Por tanto,

$$\begin{array}{l} Mod((\forall x)P(x)) \subseteq Mod(\varphi) \\ \Rightarrow \text{(teoría de conj.)} \\ Mod((\forall x)P(x)) - Mod(\varphi) = \emptyset \end{array}$$

Otra alternativa para el testigo puede ser $\varphi = \neg\bot$.

b. La afirmación es **falsa**.
Sea $\delta = (\forall x)P(x)$.

Veamos que $\mathcal{M}_1 = \langle\{\circ, \bullet\}, \{\circ\}, \{\circ\}\rangle$ es modelo de $(\exists x)(P(x) \land Q(x))$:

$$\mathcal{M}_1 \models (\exists x)(P(x) \land Q(x))$$
$\Leftrightarrow$ (2.4.5., sust y def. $\mathcal{M}_1$)
$$(\bar{\exists} a \in \{\circ, \bullet\})\ a \in \{\circ\} \text{ y } a \in \{\circ\}$$
(Se cumple tomando $a = \circ$)

Además $\mathcal{M}_1$ no es modelo de δ:

$$\mathcal{M}_1 \not\models \delta$$
$\Leftrightarrow$ (def. δ)
$$\mathcal{M}_1 \not\models (\forall x)P(x)$$
$\Leftrightarrow$ (contrarrecíp. 2.4.5., sust y def. $\mathcal{M}_1$)
$$(\bar{\exists} b \in \{\circ, \bullet\})\ b \notin \{\circ\}$$
(Se cumple tomando $b = \bullet$)

Como $\mathcal{M}_1 \models (\exists x)(P(x) \land Q(x))$ y $\mathcal{M}_1 \not\models \delta$, entonces $(\exists x)(P(x) \land Q(x)) \not\models \delta$. Y por corrección, $\delta \notin \textsc{Cons}((\exists x)(P(x) \land Q(x)))$.

Por otro lado, $\textsc{Cons}((\exists x)(P(x) \land Q(x))) \cup \{\delta\}$ es consistente, dado que $\mathcal{M}_2 = \langle \{\circ\}, \{\circ\}, \{\circ\} \rangle$ lo modela:

$$\mathcal{M}_2 \models \delta$$
$\Leftrightarrow$ (def. δ)
$$\mathcal{M}_2 \models (\forall x)P(x)$$
$\Leftrightarrow$ (2.4.5., sust y def. $\mathcal{M}_2$)
$$(\bar{\forall} d \in \{\circ\})\ d \in \{\circ\}$$
(Se cumple dado que $\circ \in \{\circ\}$)

$$\mathcal{M}_2 \models \textsc{Cons}((\exists x)(P(x) \land Q(x)))$$
$\Leftrightarrow$ (def. $\textsc{Cons}$)
$$\mathcal{M}_2 \models (\exists x)(P(x) \land Q(x))$$
$\Leftrightarrow$ (2.4.5., sust y def. $\mathcal{M}_2$)
$$(\bar{\exists} c \in \{\circ\})\ c \in \{\circ\} \text{ y } c \in \{\circ\}$$
(Se cumple tomando $c = \circ$)

Por lo tanto, el conjunto $\textsc{Cons}((\exists x)(P(x) \land Q(x)))$ no es consistente maximal, ya que al agregarle la fórmula δ (que no estaba en el conjunto) sigue siendo consistente.

c. La afirmación es **verdadera**.
Sea $\Delta \subseteq$ `SENT` una teoría tal que $\bot \notin \Delta$. Si Δ fuera inconsistente, se cumpliría $\Delta \vdash \bot$. Pero como Δ es teoría, debe cumplirse $\bot \in \Delta$, lo que es absurdo. Por tanto, Δ es teoría consistente.

Además, sabemos por por el práctico 9 que $Th(\emptyset) = \texttt{SENT}$, entonces por teoría de conjuntos $Th(\emptyset) \cap \Delta = \Delta$, que es teoría consistente por lo anterior.