

Examen de Lógica

10 de Febrero de 2021

Indicaciones generales

- Apagar los celulares.
- La duración del examen es de **tres (3)** horas.
- En esta prueba **no** se permite consultar material alguno.
- **Toda respuesta debe estar fundamentada.** Pueden usarse los resultados que aparecen en el texto del curso, en esos casos debe describirse con precisión el enunciado que se utiliza.

Ejercicio 1(25 puntos)

Es posible dar una representación unaria (con un solo símbolo, por ejemplo i) del conjunto los naturales sin el 0 usando tiras con un solo símbolo en donde el número es representado por el largo de la tira. Ej: i representa al 1, ii representa al 2, iii representa al 3, etc.

- Defina el lenguaje \mathcal{L} de todas las tiras posibles de símbolos del conjunto $\{i\}$ que tienen al menos un símbolo.
- Defina la función $v : \mathcal{L} \rightarrow \mathbb{N}$ tal que devuelve la cantidad de i que tiene la tira.
- Defina la función $Prod : \mathcal{L} \times \mathcal{L} \rightarrow \mathcal{L}$ tal que $v(Prod(\alpha, \beta)) = v(\alpha) * v(\beta)$.
- Assumiendo que se cumple que $v(\alpha\beta) = v(\alpha) + v(\beta)$ pruebe por inducción que su definición de $Prod$ es correcta, o sea, pruebe que para cualquier α y β , se cumple que $v(Prod(\alpha, \beta)) = v(\alpha) * v(\beta)$.

Ejercicio 2 (25 puntos)

Considere el tipo de similaridad $\langle 1; 1; 1 \rangle$. Indique cuáles de las siguientes afirmaciones se cumplen y cuáles no. Justificar en cada caso.

- $(\bar{\forall}\Gamma \subseteq \text{SENT})(\bar{\forall}\sigma \in \text{SENT})(\Gamma \not\vdash \sigma \Rightarrow \Gamma \vdash \neg\sigma)$.
- $(\bar{\forall}\Gamma \subseteq \text{SENT})(\bar{\forall}\sigma \in \text{SENT})(\Gamma \vdash \neg\sigma \Rightarrow \Gamma \not\vdash \sigma)$.
- $(\bar{\forall}\Gamma \subseteq \text{SENT})(\bar{\forall}\sigma_1 \in \text{SENT})(\bar{\forall}\sigma_2 \in \text{SENT})(\Gamma \not\vdash \sigma_1 \vee \sigma_2 \Rightarrow \Gamma \not\vdash \sigma_1 \text{ o } \Gamma \not\vdash \sigma_2)$.
- $(\bar{\forall}\Gamma \subseteq \text{SENT})(\bar{\forall}\sigma_1 \in \text{SENT})(\bar{\forall}\sigma_2 \in \text{SENT})(\Gamma \not\vdash \sigma_1 \text{ o } \Gamma \not\vdash \sigma_2 \Rightarrow \Gamma \not\vdash \sigma_1 \vee \sigma_2)$.

Ejercicio 3 (25 puntos)

Construir derivaciones para probar los siguientes juicios. En ningún caso son válidas consideraciones semánticas.

- $\vdash \alpha \wedge \beta \leftrightarrow \neg(\alpha \rightarrow \neg\beta)$
- $(\forall x)(\forall y)(P(x, y) \leftrightarrow f(x) = y) \vdash (\forall x)(\forall z)(f(f(x)) = z \rightarrow (\exists y)(P(x, y) \wedge P(y, z)))$

Ejercicio 4 (25 puntos)

Considere los siguientes conjuntos:

- $\Gamma = \{p_i \wedge p_j / i, j \in \mathbb{N}\}$
- $\Delta = \{p_i \rightarrow p_{i+1} / i \in \mathbb{N}\} \cup \{p_0\}$

Indique cuáles de las siguientes afirmaciones son correctas. Justifique sus respuestas.

- a. $\Gamma = \Delta$
- b. $\text{CONS}(\Gamma)$ es consistente maximal.
- c. $\text{CONS}(\Delta)$ es consistente maximal.
- d. $\text{CONS}(\Delta) = \text{CONS}(\Gamma)$.
- e. Todos los conjuntos consistentes maximales son iguales (Existe un único conjunto consistente maximal).